

Análisis metacognitivo de protocolos en tareas de estimación: Una reflexión sobre el carácter estratégico de los procedimientos de cálculo

*Carlos de Castro Hernández, Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle
Enrique Castro Martínez e Isidoro Segovia Álex, Universidad de Granada*

Resumen

En este trabajo se realiza un análisis metacognitivo de los protocolos de pensar en voz alta de 26 estudiantes de magisterio al realizar tareas de estimación en cálculo. El marco teórico empleado para el análisis contempla la metacognición como conocimiento y control de la propia actividad cognitiva y está basado en los trabajos de Flavell (1987), Kluwe (1982, 1987), Schoenfeld (1983, 1985), y Garofalo y Lester (1985). Los cambios que se producen en la fase de planificación/ejecución de la resolución de los problemas de estimación, prueban la presencia de metaprocesos de monitorización y regulación que muestran el carácter estratégico de los procedimientos que utilizan los participantes para producir sus estimaciones. Las estrategias se definen como configuraciones en redes sistémicas.

Palabras clave

Metacognición, monitorización, regulación, estimación en cálculo, estrategias, redes sistémicas.

Abstract

In this work we make a metacognitive analysis of the thinking aloud protocols taken from 26 preservice elementary teachers when they carry out computational estimation tasks. The theoretical frame employed for the analysis equals metacognition with the knowledge and control of the own cognitive activity and it is based on the works of Flavell (1987), Kluwe (1982, 1987), Schoenfeld (1983, 1985), y Garofalo y Lester (1985). Changes taking place in the planning/execution phase during the estimation problem solving, prove the existence of monitoring and regulation metaproceses. They show the strategic nature of the procedures that participants use when they produce their estimates. Strategies are defined as configurations in systemic networks.

Key words

Metacognition, monitoring, regulation, computational estimation, strategies, systemic networks.

Introducción

Por metacognición entendemos el conocimiento y control de la propia actividad cognitiva. Dentro del conocimiento metacognitivo, Flavell (1987) establece la distinción entre el conocimiento referido a la propia capacidad cognitiva, el conocimiento de las tareas que se deben resolver, y el de las estrategias que se emplean para resolver dichas tareas. Así pues, hay conocimiento metacognitivo de persona, tarea y estrategia. El otro componente de la metacognición es el formado por el control metacognitivo, que está formado por los procesos de monitorización (o supervisión) y regulación. La *monitorización* es el proceso de *producción de conocimiento sobre el curso de la propia actividad cognitiva*. La *regulación* consiste en la *producción de cambios en el curso de la propia actividad cognitiva como resultado de la monitorización*.

En los trabajos sobre metacognición en resolución de problemas matemáticos, se suelen tomar como punto de partida las fases de resolución de un problema. Una revisión de trabajos en los que se han descrito las fases en el proceso de resolución de problemas se puede consultar en Castro (1991, pp. 34-39). En este trabajo, adoptaremos la opción de tres fases: representación-comprensión, planificación-ejecución y evaluación. Dadas las peculiares características de los procesos de estimación, consideramos más adecuado considerar conjuntamente las fases de planificación y ejecución. Un aspecto fundamental al considerar estas «fases» es que en ocasiones no es posible establecer una distinción nítida entre las mismas. No son fases temporales sino distintos tipos de actividad cognitiva que desarrollan las personas durante el proceso de resolución de un problema.

A lo largo de la literatura sobre educación matemática, encontramos diversos modelos elaborados con el objetivo de analizar los elementos metacognitivos de la actividad matemática de resolución de problemas. En todos ellos ha tenido una notable influencia el modelo de Polya (1957): Comprender el problema, elaborar un plan, ejecutar el plan, visión retrospectiva (aunque con muy notables cambios en su interpretación teórica). Entre los modelos cognitivos-metacognitivos cabe destacar el de Schoenfeld (1983), en el que se tienen en cuenta la lectura, análisis, exploración, planificación/implementación y verificación. También es importante el de Garofalo y Lester (1985) que considera la orientación (comprensión y representación inicial), organización (planificación), ejecución y verificación (evaluación). Finalmente, citamos el modelo de Artzt y Armour-Thomas (1992) con fases de lectura, comprensión, análisis, exploración, planificación, implementación, verificación, observación y escucha. En este trabajo, basado en análisis de la realización de tareas en grupo, aparecen la «regulación por otros» y la «toma de decisiones conjunta» como elementos adicionales a otros modelos.

Para resumir, en la Figura 1 aparecen integrados los distintos componentes de la metacognición. Con respecto a ella, cabe hacer varias consideraciones. En primer lugar, como advertía Flavell (1987), no es posible separar por completo el conocimiento de la persona, la tarea y la estrategia. Por ejemplo, cuando un alumno dice que a él le parece más difícil producir una estimación para una multiplicación que para una división, el conocimiento de persona (lo que resulta difícil para él) y de la tarea (de multiplicación o de división) aparecen mezclados. Por otra parte, tampoco es fácilmente distinguible en las tareas de

estimación, la fase de planificación y la de ejecución. Algunos sujetos comienzan la planificación de su estrategia eligiendo trincar los números e inmediatamente cambian (evidenciando en su pensamiento procesos de monitorización y regulación) a otra destreza de aproximación como el redondeo. Esto se hace antes incluso de haber concluido su planificación inicial eligiendo el grado de aproximación, forma de ajustar el valor posicional, etc. A este respecto, cabe destacar que en la literatura encontramos tanto autores que prefieren considerar una única fase de planificación/ejecución (Schoenfeld, 1985) como otros que optan por separar estas dos fases (Artz, Armour-Thomas, 1992), dependiendo en gran medida esta elección de otras características de la investigación (como el analizar un trabajo individual o grupal, la duración de

la resolución de las tareas, etc.). Davidson y Sternberg (1998, p. 54) indican que a medida que el sujeto va avanzando a través de la resolución de un problema se hace necesaria la actualización de dichos planes basándose en la supervisión metacognitiva que indica en qué medida están funcionando los planes y qué posibilidades de modificación están disponibles. Esto indica que los planes se rectifican o que incluso, en ocasiones, es necesario comenzar de nuevo el proceso de planificación durante la ejecución. Esta dificultad en separar tipos de conocimiento y fases de resolución, dentro del contexto de las tareas de estimación, hará que pongamos un énfasis mayor en ejemplificar distintos elementos del conocimiento y procesos metacognitivos que en elaborar un esquema de clasificación formado por categorías excluyentes.

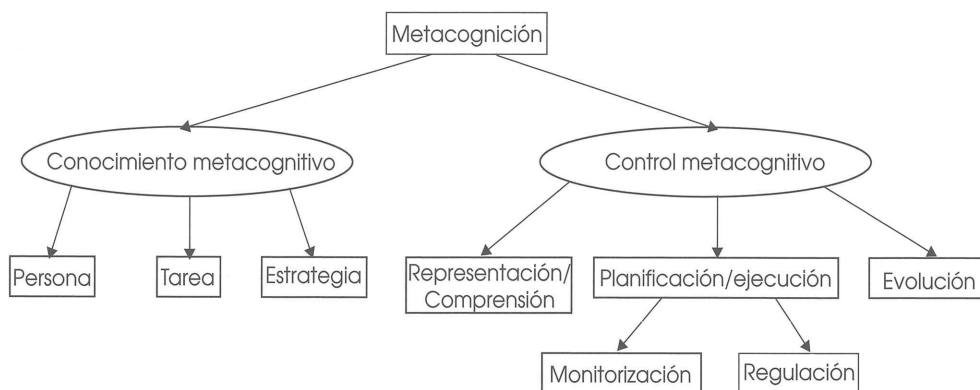


Figura 1. La metacognición como conocimiento y control metacognitivos ¹.

En nuestros planteamientos iniciales sobre la metacognición, hemos adoptado un modelo previo que todavía necesita ser ajustado. Este modelo toma como partida el trabajo de Garofalo y Lester (1985) e incorpora al mismo otras referencias coherentes con sus fundamentos teóricos (Davidson, Deuser y Sternberg, 1996; Davidson y Sternberg, 1998) y otros elementos que no estaban en el

modelo inicial (como la aportación de Kluwe, 1982 y 1987 para la distinción entre autorregulación y supervisión).

El objetivo del modelo es proporcionar un marco teórico para el análisis de los protocolos de «pensar en voz alta» de los

¹ Figura adaptada de Mateos (2001, p. 33).

sujetos, con el fin de describir las estrategias que emplean cuando realizan tareas de estimación en cálculo. El objetivo final, más a largo plazo, sería la elaboración de un modelo de actuación para las tareas de estimación en cálculo. Este modelo consideraría la estimación (incluso la que se realiza para operaciones descontextualizadas) dentro del marco más general de la resolución de problemas. El objetivo del modelo es el de proporcionar una herramienta para el análisis de protocolos de pensar en voz alta, con el que se puedan analizar también los aspectos metacognitivos y que aspire a dar una descripción detallada de las estrategias de estimación.

Debe resaltarse la importancia de contar con un marco teórico adecuado para analizar los aspectos metacognitivos de los protocolos de resolución de problemas matemáticos. Por ejemplo, Kluwe (1982, pp. 213-214) indica que su clasificación de decisiones ejecutivas está tomada de análisis de protocolos de pensar en voz alta. Este autor utiliza su clasificación para analizar los protocolos de pensar en voz alta que aparecen en el trabajo de Newell y Simon (1972) y encuentra que el 60% de las expresiones, consideradas como meta-expresiones, no aparecen codificadas por los autores del trabajo. Ignorar los aspectos metacognitivos podría conducirnos a perder una información demasiado valiosa para comprender adecuadamente la actividad matemática de los alumnos.

Las estrategias y los procesos metacognitivos en la estimación en cálculo

Las estrategias que utilizadas al resolver tareas de estimación han sido estudiadas por diversos autores (Dowker, 1992; Dowker, Flood, Griffiths, Harris y Hook, 1996; Hanson y Hogan, 2000; Levine, 1982; Reys, Bestgen, Rybolt, & Wyatt,

1982; Reys, Reys y Flores, 1991; Reys, Reys, Nohda, Ishida, Yoshikawa y Shimizu, 1991). También ha habido estudios orientados a elaborar un modelo para los procesos y estrategias de estimación. Un trabajo pionero en este campo es el modelo de procesos de estimación: reformulación, traducción y compensación (en adelante modelo RTC), presentado por Reys y otros (1982), primero con una amplia aceptación en el ámbito de estudio de la estimación en cálculo.

Tanto los trabajos sobre estrategias de estimación, como los intentos de elaborar un modelo para procesos y estrategias de estimación, han abierto un campo de trabajo que todavía requiere de profundización. Por un lado, una característica común a todas las investigaciones sobre estrategias de estimación es la carencia de un planteamiento explícito sobre qué es una estrategia. Esto hace que se hayan considerado «estrategias específicas» a las destrezas de aproximación (redondeo, truncamiento, sustitución de un decimal por una fracción, uso de números compatibles, etc.). Sin embargo, también han tenido estatus de «estrategias específicas» los algoritmos de cálculo (imitación del algoritmo escrito y los productos parciales incompletos), las propiedades de las operaciones (estrategia distributiva), los procesos generales de estimación (compensación intermedia, compensación final), e incluso las actuaciones de los alumnos en las que se pone de manifiesto que no están realizando una estimación (tratar de hacer un cálculo mental exacto, negarse a realizar una estimación o la ya citada imitación del algoritmo escrito) o en las que no hay un procedimiento genuinamente matemático (intentar adivinar el resultado).

Por otra parte, el modelo RTC, para las estrategias y procesos de estimación, presenta ciertas limitaciones producto

de la metodología empleada en los estudios que le dieron origen. Así, el modelo pretende estudiar las estrategias y procesos empleados por alumnos muy competentes en estimación (el 5% con mejor rendimiento en pruebas de estimación). El objetivo de los autores del modelo era elaborar un programa para la enseñanza de la estimación que procurara el aprendizaje, por parte de todos los alumnos, de estas estrategias y procesos empleados por los mejores estimadores. Como consecuencia de este planteamiento, este modelo no refleja (ni pretende hacerlo) la actuación en tareas de estimación de alumnos de habilidad baja.

En el ámbito de las estrategias, De Castro, Segovia y Castro (2002) utilizan un modelo alternativo para la descripción de las estrategias de estimación en el que interpretan las estrategias de forma «global». Parten de la definición de estrategia propuesta por Cockroft (1985):

Las estrategias generales son procedimientos que guían la elección de la destreza que debe emplearse o de los conocimientos a que se debe recurrir en cada etapa de la resolución de un problema o del desarrollo de una investigación (p. 87).

En el modelo, presentado originalmente en Segovia, Castro, Castro y Rico (1989), las estrategias están integradas por destrezas de aproximación, algoritmos de cálculo, procesos cognitivos (reformulación, traducción y compensación) y procesos metacognitivos (como la valoración del resultado). La adopción de este modelo permite a los autores identificar y caracterizar estrategias de estimación y realizar una clasificación sistemática de las mismas, atendiendo a los procesos de estimación que intervienen en ellas.

Este modelo, junto con otros (LeFevre, Greenham, y Waheed, 1993), ha intentado dar descripciones más precisas de los procesos y estrategias de estimación, basándose en el modelo RTC, que contribuyan a explicar mejor la actuación de todo tipo de personas ante tareas de estimación.

Los procesos metacognitivos han recibido menos atención en el ámbito de la estimación. Sowder (1994) afirma que los individuos considerados como buenos estimadores «suelen ser caracterizados como flexibles, tienen confianza en sí mismos, toleran el error en las estimaciones y (...) examinan la razonabilidad de los resultados» (p. 142). La persona que realiza una estimación debe ser capaz de elegir de forma flexible una estrategia adecuada para el problema de estimación y de evaluar tanto el proceso (modificándolo si fuera oportuno) como el resultado (examinando la razonabilidad del mismo). Sowder (1994) considera la elección flexible de estrategias y la valoración del proceso y del resultado como ejemplos de «auto-regulación» y «auto-monitorización», que constituyen procesos metacognitivos. También Levine (1980) destaca la importancia de la flexibilidad al afirmar que:

El alumno que cambia a algún otro modo alternativo de estimar al experimentar dificultades exhibe unos recursos y una flexibilidad no mostrados por los alumnos que, o bien dan un resultado al azar, o bien vuelven de nuevo a intentar la misma estrategia problemática. La misma flexibilidad fue mostrada por alumnos que tomaron en consideración sucesivamente varias variaciones de la misma estrategia sin realizar efectivamente los cálculos mas que para la última variación considerada. (p. 83)

Lemaire, Lecacheur y Farioli (2000) citan aspectos del uso de estrategias en los que se ponen de manifiesto distintos procesos metacognitivos: El repertorio de estrategias, la distribución de las estrategias en función del tipo de problema al que se aplican, la ejecución de estrategias (en términos de rapidez y precisión), y la selección de estrategias o ajuste de las mismas a las características de un problema (adaptabilidad estratégica) (p. 142).

Aunque las estrategias de estimación han recibido gran atención en la literatura sobre estimación, faltan trabajos en los que se haga un estudio detallado de los procesos metacognitivos que intervienen en la ejecución de las tareas de estimación.

De acuerdo con estos antecedentes, el objetivo de este trabajo es realizar un análisis metacognitivo de protocolos de pensar en voz alta de estudiantes de magisterio, al resolver tareas de estimación en cálculo. Este análisis conducirá, en las conclusiones, a reflexionar sobre el carácter estratégico de los procedimientos que emplean los estudiantes al estimar y sobre la propia idea de «estrategia», en el ámbito de la estimación en cálculo.

Método

Participantes

En la investigación han participado 26 estudiantes del Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle de Madrid. Todos ellos han cursado la asignatura «Matemáticas y su Didáctica». Dentro de la misma, han tenido un periodo de instrucción sobre estimación en cálculo de 10 horas de duración. Los estudiantes aprendieron estrategias de estimación y las practicaron en cálculos descontextualizados y en situaciones de

resolución de problemas. También se trató la evaluación de la estimación por medio de intervalos de respuesta aceptable y a través del porcentaje de error, y se analizaron propuestas de actividades de estimación para la Educación Primaria (tomadas del trabajo de Reys, Trafton, Reys, & Zawojewski, 1987). Al finalizar el periodo de instrucción, los alumnos realizaron la prueba de estimación y la entrevista que se presentan en la siguiente sección.

Instrumentos

En este estudio se han utilizado dos instrumentos: a) una prueba de estimación que ha servido para estudiar la dificultad de los ítems en función de las variables independientes tipo de operación y tipo de número² y, b) una entrevista en la que se utilizaron los ítems de la prueba para realizar el análisis metacognitivo.

La prueba de estimación. La prueba de estimación está compuesta por los 24 cálculos que aparecen en la Tabla 1. En la elaboración de las tareas de estimación el objetivo ha sido que éstas favorezcan el uso de distintas destrezas de aproximación. Por ejemplo, todas las tareas tienen las dos primeras cifras significativas —de alguno de sus números— próximas a alguno de los siguientes números: 25, 33, 50, 66, 75 o 100. Esto se hace para que se pueda emplear en todos los cálculos la sustitución de un número por una fracción — $1/4$, $100/4$, $1/3$, $100/3$, etc.— o por una potencia de 10. Se ha tratado de favorecer que pueda emplearse en las divisiones la sustitución de los números iniciales por números compatibles, entre los que haya relación de múltiplo y divisor.

² En el marco general de la investigación, aunque este trabajo sólo hace referencia a la parte de la investigación correspondiente al análisis metacognitivo.

Tabla 1. *Prueba de estimación*

(1) 46×771	(9) $85,9 \div 3,42$	(17) $0,37 \div 0,543$
(2) 58×244	(10) $96,2 \div 6,25$	(18) $0,63 \div 0,785$
(3) $968 \div 24$	(11) $9,88 \div 25,6$	(19) $0,025 \times 776$
(4) $354 \div 88$	(12) $8,85 \div 42,6$	(20) $852 \times 0,048$
(5) $86 \div 222$	(13) $2,57 \times 0,72$	(21) $0,46 \div 0,066$
(6) $36 \div 258$	(14) $0,45 \times 7,85$	(22) $0,68 \div 0,024$
(7) $78,4 \times 89,5$	(15) $0,962 \div 0,25$	(23) $0,059 \div 0,23$
(8) $34,1 \times 47,2$	(16) $0,747 \div 0,35$	(24) $0,086 \div 0,42$

La prueba fue administrada en el aula de informática durante un periodo de clase, utilizando ordenadores. Los alumnos entraron en el aula sin llevar nada consigo. Se evitaba con estas medidas que los alumnos pudieran utilizar algún procedimiento de cálculo que no fuese mental. No hubo limitación directa del tiempo de respuesta para cada ítem o para el total de la prueba, aunque se dieron indicaciones a los alumnos para que realizaran sus estimaciones con rapidez.

Las entrevistas. Se han realizado para abordar el análisis metacognitivo. A los estudiantes se les pedía que produjeran una estimación para cada cálculo, explicando los pasos que iban dando, a medida que pensaban cómo hacer la estimación. De acuerdo con el objetivo del análisis (los procesos metacognitivos), se orientó a los alumnos a producir informes concurrentes (a pensar en voz alta) en lugar de emplear los informes retrospectivos (en los que suele quedar un rastro menor de los procesos metacognitivos). Los participantes fueron divididos en dos grupos. En uno de los grupos se utilizaron los ítems impares de la prueba y en el otro grupo los pares. Las entrevistas fueron realizadas individualmente. Se registraron utilizando una grabadora y fueron transcritas a papel para su posterior análisis.

Resultados

Los protocolos de «pensar en voz alta» de los alumnos han sido analizados tomando como referencia el modelo explicado en la primera sección del trabajo. Se han hallado elementos de conocimiento metacognitivo y de control metacognitivo. Dentro del conocimiento cognitivo, se proponen ejemplos del conocimiento metacognitivo de persona, de tarea, y de estrategia. Los procesos de monitorización y regulación serán el centro de atención en el estudio del control metacognitivo.

Conocimiento metacognitivo

Conocimiento metacognitivo de persona (MKP). Dentro de esta categoría, consideramos de las expresiones en las que se refleja el autoconcepto general de los estudiantes como matemáticos (estudiante 29), o el conocimiento que tienen de sus propias destrezas mentales, como la capacidad de tomar decisiones (estudiante 29) o de concentrarse para realizar una tarea (estudiante 30). Por el contrario, no se incluyen los casos en que los alumnos se refieren a su propia capacidad matemática con respecto a una tarea concreta.

Alumno 29 (Tarea: $78,4 \times 89,5$, Estimación: 7200, Error: 2.6%): Esto sería

800 por 900, 9 por 8 son 72. Cero coma... Ah, no, porque redondeas. Redondeabas (a) 80 por 90 y claro, se quedaba en 72. Y hacías así (escribe dos ceros) y valía esto. Me parece que sí, ¿No? Porque eran las comas iguales, ¿No?... Mira que... Es que no lo sé. Yo dudo mucho.

Alumno 30 (Tarea: $0.747 \div 0.35$, Estimación: 0.21, Error: 90.2%): Cómo se nota que no soy de ciencias, ¿Eh? Vale. Quito la coma. La corro dos aquí... Me quedaría 74 entre 35. Pues aquí también habría cero coma... Cabe a 2... 0,21.

Alumno 12 (Tarea: $0.37 \div 0.543$, Estimación: 100, Error: 14575.7%): Tendría que hacer 37000 entre 543. Entonces redondeo a 40000 entre 500 que son, a ver... 2000. Un momento... Sería 2000 por 500... ¿200? Yo es que me desconcentro con todo.

Conocimiento metacognitivo de persona y tarea (MKPT). Es el conocimiento que tiene una persona sobre su propia capacidad para resolver una tarea matemática concreta. Los alumnos saben que unos problemas «se les dan mejor» que otros, que hay problemas que no saben resolver, etc.

Estudiante 27 (Tarea: $8.85 \div 42.6$, Estimación: 0,2, Error: 3,7%): 0,2... 42 entre 0,2 sería como multiplicarlo por 2. Ah no. Entonces no puede ser. No. Es que no sé cómo lo he hecho. Lo he puesto porque... no lo sé, no lo sé. Es que yo esto siempre lo hago con lápiz.

Alumno 20 (Tarea: 78.4×89.5 , Estimación: 7200, Error: 2,6%): Ahora utilizo 80 por 90, que va a ser menos, pero estos números, por ejemplo, para mí, son más complicados. Entonces 80 por 90 son 7200.

Alumno 9 (Tarea: $0.962 \div 0.25$, Estimación: 0,25, Error: 93,5%): Aquí redondearía esto, como está más cerca de la unidad, que es 1 en este caso, lo redondearía y haría una división aproximada entre 0,25. Entonces sería 1 entre 0,25... Sería restar dos comas... Es que aquí ya me he liado. El problema es que lo veo un poco abstracto. Pero sería eso.

Alumno 14 (Tarea: $0.46 \div 0.066$, Estimación: 0,46, Error: 93,4%): Ahora empieza lo difícil porque no sé dividir con comas. Y, sobre todo, porque no son iguales (Se refiere a los números de cifras decimales de los dos números).

Conocimiento metacognitivo de tarea (MKT). Suele aparecer cuando los alumnos, por ejemplo, valoran el grado de dificultad de una tarea o la dificultad relativa de dos tareas. Sólo se incluyen en esta categoría los juicios sobre la dificultad de tareas que no son considerados por los alumnos como una dificultad propia, sino como algo difícil, en general, para todos los alumnos. En los dos primeros ejemplos a continuación (estudiantes 14 y 2) la valoración de la dificultad o la facilidad de una tarea conducen, respectivamente, a hacer un cambio en el grado de aproximación o a ajustar la primera estimación empleando la propiedad distributiva. Así, estos ejemplos pueden ilustrar también el proceso de supervisión y posterior regulación que está llevando a cabo el alumno durante la ejecución de la tarea.

Estudiante 14 (Tarea: 46×771 , Estimación: 36000, Error: 1.5%): 46 por 780, o por 770... Sigue siendo demasiado difícil para hacerlo mentalmente. Así que hago, por un lado, 460 lo voy a redondear un poco a 450. 771 hacia 800.

Estudiante 2 (Tarea: $0.68 \div 0.024$, Estimación: 34, Error: 20.0%): Esto sería el 0,68 lo multiplico por 100 y sería 68. Y el 0,024 lo multiplico por 100 y me daría 2,4. Entonces sería 68 entre 2,4 y... pues 68 entre 2, bueno, sí, o 70 entre 2 (son) 35. Bueno, es fácil de hacer así que 34.

En el caso siguiente, se considera la división de un número por otro mayor como un caso especialmente difícil dentro de la división. La dificultad aumenta por el hecho de dividir con números decimales.

Estudiante 14 (Tarea: $0.37 \div 0.543$, Estimación: 0.0037, Error 99.5%): Este es todavía más difícil. Porque, como no me acuerdo de dividir con decimales, pues dividir un número pequeño con decimales entre uno mucho más grande es todavía más difícil... Entonces... .. Entonces me imagino que va a empezar por 0,0 y no sé si otro cero... Yo creo que sí. Y es que no sé. Así que voy a poner un número cualquiera. El mismo. (Escribe 0.0037)

Conocimiento metacognitivo de tarea y estrategia (MKTS). Es el conocimiento sobre qué destrezas, *estrategias* o procedimientos en general son adecuados para un determinado tipo de tarea.

Alumno 19 (Tarea: 0.025×776 , Estimación: 2,66, Error: 86,3%): 776 lo redondearía a 800. Lo multiplico por 100 a ambos lados. ¡Ay!, un segundito. Lo estoy multiplicando. Es que, como no voy tomando nota, se me olvidan luego los números. Pues, multiplicando daría 266, que tendría que correr la coma.

Entrevistador: ¿Multiplicando que?
Alumno 19: A ver. 0,025 lo redondeo a 0,03 y 776 lo redondeo a 800. Multiplico por 100 a ambos lados, para que me sea más fácil el cálculo y,

calculando a ojo, más o menos, son 266 que sé que tengo que correr la coma dos puestos a la izquierda. Sería 2,66.

El alumno explica que: «En una tarea de cálculo de este tipo (conocimiento de tarea) es difícil realizarlo mentalmente y facilita los cálculos adoptar la estrategia de anotar los números en papel para que no se olviden (conocimiento de estrategia).» Se ponen pues de manifiesto conjuntamente el conocimiento del sujeto sobre una determinada *tarea* y sobre la *estrategia* adecuada para afrontarla. Otro conocimiento metacognitivo de esta naturaleza (tarea-estrategia) aparece al señalar poco después que la estrategia de eliminar las comas decimales multiplicando por 100 los dos números, facilita la tarea de efectuar el cálculo.

Control metacognitivo

Dentro del control metacognitivo, establecemos los apartados principales de monitorización y de regulación. Por razones de brevedad, se han incluido sólo los ejemplos de conocimiento metacognitivo y control metacognitivo más relevantes en el análisis. Se omiten algunos otros ejemplos (como la «selección de destreza de aproximación» o la «selección de la forma de operar la coma decimal», correspondientes a la planificación inicial del procedimiento para producir una estimación). No obstante, aunque no figuren como tipos formulados explícitamente, sí aparecen en el análisis. Cualquier cambio en la destreza de aproximación refleja una selección inicial, un proceso de evaluación (monitorización) y otro de regulación (al seleccionar la nueva destreza). Siguiendo el modelo de la Figura 1, se ha desarrollado en el análisis, fundamentalmente, la fase de planificación/ejecución.

Monitorización

Como advertíamos en la introducción, consideramos la monitorización como el proceso de producción de conocimiento sobre el curso de la propia actividad cognitiva. Hemos elegido, para su presentación en este trabajo, ejemplos de situaciones en que los alumnos piensan que han cometido un error, por ser este un caso evidente de supervisión de la propia actividad cognitiva. En muchos de los ejemplos propuestos, la monitorización conducirá a una posterior regulación de la actividad cognitiva. También se prestará atención a la evaluación que hacen las personas, durante su actividad de producción de estimaciones, de su propio estado cognitivo o sobre la pertinencia o idoneidad de la aplicación de una estrategia.

Pensar³ que hay un error en la representación del problema (MMER). Aquí se presentan ejemplos correspondientes a la fase de representación/compreensión (ver Figura 1). En algunos casos los estudiantes tienden a atribuir a las tareas que tienen que realizar características distintas de las que realmente tienen (a veces, características de tareas inmediatamente anteriores). Esto ocurre al estudiante 2 y al 27, que suponen al inicio que están haciendo una división, o al estudiante 22 que piensa que está operando dos números con cifras decimales. Todos ellos advierten el error y modifican su procedimiento.

Estudiante 2 (Tarea: 0.45×7.85 ; Estimación: 4; Error: 13,2%): 0,45 lo... bueno. He puesto 0, porque no cabe.

Entonces pongo 0,0 para que sea 45... Vale, nada. He dividido.

Estudiante 22 (Tarea: 0.025×776 ; Estimación: 200; Error: 930,9%): Uno, dos,... Ah, no. Este no tiene nada (776 no tiene cifras decimales). Pues esto, 776, (hago) la mitad. Bueno. Lo voy a redondear a 800. La mitad sería 400 y la mitad de 400, 200.

Estudiante 27 (Tarea: 852×0.048 ; Estimación: 0.4; Error: 99,0%): 152. 152000 entre 48. 8 entre 4 a 2... Ah, no. Que es por (una multiplicación). Me he *hecho un lío*. A ver. 8 por 4, 32. 8 por 5, 40. 40 con... Sí. 8 por 5, 40 con dos ceros, y luego le tengo que quitar tres. Sería a 0,4.

Pensar que hay un error en la ejecución de una estrategia (MMES). Son situaciones en las que los estudiantes piensan que han aplicado de manera incorrecta un procedimiento de cálculo a una situación concreta. Esto suele ocurrir cuando no tienen claro el procedimiento. En los siguientes cuatro ejemplos, vemos cómo se da esta situación en el ajuste del valor posicional. En el primer caso, el estudiante 19 redondea 771 a 80, se da cuenta de su error y sustituye 80 por 800. Después de detectar su error en el redondeo, multiplica 5 por 8 y ajusta el valor posicional, para dar un resultado de 40000. Después, cuenta el número de ceros de 50 y 800 y parece pensar que ha cometido un error, pues entre 50 y 800 sólo hay 3 ceros. De modo que elimina un cero y deja su estimación en 4000. La misma situación se da en sentido contrario en el siguiente ejemplo del estudiante 20.

Estudiante 19 (Tarea: 46×771 ; Estimación: 4000; Error: 88,7%): Yo redondearía el 46 al 50 y el 771 a 80. Huy a 80, a 800. 5 por 8, 40. (Escribe 40000) Anda. Que pongo un cero de

³ En los nombres de las distintas categorías se ha utilizado la expresión «pensar que se ha cometido un error en...» en lugar de, por ejemplo, «detección de un error en...» porque es bastante común que los alumnos cometan errores en sus juicios sobre su propio trabajo matemático.

más. ¡Qué bruta soy! (Borra el último cero y deja 4000)

Estudiante 20 (Tarea 46×771 ; Estimación: 40000; Error: 12,8%): Voy a redondear a 800 por 50 que son 4000, 40000.

Estudiante 9 (Tarea 78.4×89.5 ; Estimación: 560000; Error: 7880,8%): Esto es 80 por, ya casi 100. Entonces, se puede hacer así. O bien por otro método, que es 8 por 7, 56. Entonces, sería la estimación y luego se le añadirían los dos ceros. Bueno, no. Eso no, porque se quedaría corto. Se añadirían 4 ceros en este caso.

Estudiante 22 (Tarea: 78.4×89.5 ; Estimación: 7200; Error: 2,6%): Muevo la coma los dos. Sería... o, no. 800 por 900. 9 por 8, 72. 800 por 900 son dos ceros. ¿Tanto? Esto me parece absurdo. No. Mejor. A ver. Es que esto es una tontería. Mejor 80 por 90. Eso. 8 por 9, 72. 80 por 90. Y dos ceros. (Escribe 7200). Así.

Pensar que se ha cometido un error en la estimación final (MMEG). Constituyen ejemplos de visión retrospectiva pues consiste en valorar si puede tener sentido una estimación o no. Son situaciones en las que se produce una evaluación del resultado (incluyen evaluar la propia estimación utilizando otra estrategia).

Estudiante 22 (Tarea: 78.4×89.5 , Estimación: 7200, Error: 2,6%): Muevo la coma los dos. Sería... o, no. 800 por 900. 9 por 8, 72. 800 por 900 son dos ceros. ¿Tanto? *Esto me parece absurdo.* No. Mejor. A ver. Es que esto es una tontería. Mejor 80 por 90. Eso. 8 por 9, 72. 80 por 90. Y dos ceros. (Escribe 7200). Así.

Estudiante 29 (Tarea: 0.025×776 , Estimación: 0,024, Error: 99,9%): 0,025 lo...

subo a... 30 y 776 lo subo a 800. Sería 800 por 30. 3 por 8, 24. 24... y, como es una multiplicación con decimales, pues sería, cuento los decimales, los números que hay detrás del cero coma, que son tres. A ver. Esto es un lío. No sé. 800 por 20... No. 800 por 30. 8 por 3, 24. Será así. Sería... 0,024. Porque cuento los números que hay detrás del cero coma. Entonces cuento el 4 como 1, el 2 como 2, el cero como el 3. Entonces pongo el 0,024. Que no sé si será eso... Espérate a ver. Es que me parece muy raro que sea eso... ... 800 por 30. 3 por 8 son 24. Yo que sé. *Es que yo creo que eso está mal...* Vale. (Deja el 0,024 como estimación y pasa al siguiente cálculo)

Estudiante 30 (Tarea: $36 \div 258$, Estimación: 0,1, Error: 28,3%): Pondríamos un cero. Se lo pondríamos luego al 36. 360 entre 258. Entonces sería 0,... 0,1... ... No sé. Yo 0,1 pondría, pero yo creo que es poco resultado.

Evaluación del estado actual de la persona (MMP). Refleja situaciones de bloqueo, cansancio mental, que pueden influir en el proceso de producir una estimación. Aunque no es objetivo de la presente investigación estudiar tal tipo de influencia, proponemos varios ejemplos (como el del estudiante 9 o el del 133) en que este tipo de bloqueos conduce, respectivamente, a un cambio de estrategia y a una repetición de la estrategia desde su inicio.

Estudiante 12 (Tarea: $968 \div 24$; Estimación: 50; Error: 24,0%): Esto redondeo a 1000. 1000 entre... Esto lo redondeo a 25... y... a ver... sí, ¿no? A ver, un momento... No. ¿Qué estoy haciendo? Un momento... ... Estoy un poco espesita. A ver... (Escribe 50).

Estudiante 9 (Tarea: $0.46 \div 0.066$; Estimación: 0; Error: 100,0%): Esto es 1/2.

Tiende a $\frac{1}{2}$. Y esto es... Esto es casi 0,01. Así que podría hacerse $\frac{1}{2}$ entre 0,01 y sería... Aquí ya me he bloqueado. Es que es por esto. Por la diferencia de decimales que hay...

Estudiante 30 (Tarea: $0.63 \div 0.785$; Estimación: 0.08; Error: 90,0%): Estos tres lo paso aquí. Sería 630 entre 785. Como no me cabe, pongo otro cero. Entonces ya tengo 0,0 algo. Ahora para dividir 630. No. 6300 entre 785. Lo multiplico por 8, por que por 9 ya se me pasa. Entonces pondría 0,08. Vaya cacaos mentales me estoy haciendo.

Estudiante 133 (Tarea: $0.086 \div 0.42$; Estimación: 0.03; Error: 85,3%): Cambio la coma aquí. Uno y dos. Entonces tengo que quitarla aquí. Uno y dos. Me queda 8,6 dividido entre 42... A ver. ¡Qué mareo de números tengo!... Me he quedado en blanco...

Evaluación de la aplicación de una estrategia (MMS). En este tipo se incluye el conocimiento de que la aplicación de un procedimiento es más sencilla que la de otro en una situación concreta. También se incluye la consideración de la posibilidad de aplicar otra estrategia después de haber estimado. Otro ejemplo de este tipo es la duda sobre si se recuerda bien un procedimiento o sobre si es correcto un procedimiento.

Estudiante 29 (Tarea: 78.4×89.5 ; Estimación: 7200; Error: 2,6%): Esto sería 800 por 900. 9 por 8 son 72. Cero coma... Ah, no. Porque redondeas. Redondeabas 80 por 90 y claro, se quedaba en 72. Y hacías así (escribe dos ceros) y valía esto. Me parece que sí, ¿No? Porque eran las comas iguales, ¿No?... Mira que... Es que no lo sé. Yo dudo mucho. 800 por 900. 80 por 90... 80 por 90... Pongo el 72 y... Es

que no sé si es 720 o 7200. 80 por 90 se añadirían los dos ceros. (Escribe 7200)

Estudiante 14 (Tarea: $85.9 \div 3.42$; Estimación: 28; Error: 11,5%): El 85,9 lo redondeo a 86 para que sea más fácil... Y 86, 86 lo podría dividir entre 3,42 y entonces tendría que ponerle dos ceros para quitar la coma y que se convirtiera en 342. Y eso, mentalmente, es muy difícil. Así que voy a hacer 86 entre 3 porque, al fin y al cabo, es estimación. 86 entre 3. 3 por 1, 3; 3 por 2, 6; 3 por 3, 9. 2. Del 6 al 2, del 6 al 8, 2. Y 6. 26 entre 3. 3 por 1, 3; 3 por 2, 6; 3 por 3, 9; 3 por 4, 12; 3 por 5, 15; (inaudible) 3 por 7, 21; 3 por 8, 24. 24. 8. O sea, 28... Sí, claro. Y si en lugar de haberme imaginado la división. Lo hubiera hecho a ojo,... pues también hubiera sido muy fácil y no me hubiera complicado todo lo que lo he hecho. Porque sé dividir 86 en tres partes. Pero bueno, es tarde.

Estudiante 5 (Tarea: $0.46 \div 0.066$; Estimación: 0,7; Error: 90,0%): Corro las tres comas para allá. Uno, dos y tres. Queda 66 y aquí igual. Uno, dos y pongo un cero. O sea que sería 460 entre 66 y 460 entre 66 es lo mismo que 500... que sería a... 80. O sea que pondría... 8 por 6, 48. Pues 7 por 6, 42, que ya me cabe aquí. Y... yo creo que habría que poner un cero. Porque al poner aquí un cero, habría que poner un cero. O bueno. No estoy segura si es un cero aquí... Yo creo que sí. Es que no estoy segura de si es con el cero o no.

Estudiante 9 (Tarea: $0.059 \div 0.23$; Estimación: 0,3; Error: 16,9%): Esto sería... Aquí yo no sé si se podría aplicar lo de la mitad de la mitad. Esto es como 0,050 que es la mitad de 0,5. Puede ser. Se podría ver desde ese punto de vista.

Estudiante 22 (Tarea: $0.962 \div 0.25$; Estimación: 0,25; Error: 93,5%): Esto se acerca mucho a 1. Entonces, 1 entre 0,25 pues 0,25. ¿No?

Entrevistador: ¿Cómo lo haces? (Pregunto para saber si ha intercambiado los papeles del dividendo y el divisor $0,25 \div 1 = 0.25$)

Estudiante 22: (Pues porque 1 entre... es que 0,25 es como... Ah, no. Claro, claro. 1 entre... ... Es que esto. O sea, 1 entre 0,25 es un cálculo muy fácil pero... No sé si son 4. 1 entre 0,25 pero tampoco sé lo que hago. O si no, lo puedo hacer... Muevo dos a la derecha y muevo dos a la derecha 6.2 entre 25. 0,... Yo creo que es 0,25.

Estudiante 9 (Tarea: $0.46 \div 0.066$; Estimación: 0; Error: 100,0%): Esto es $1/2$. Tiende a $1/2$. Y esto es... Esto es casi 0,01. Así que podría hacerse $1/2$ entre 0,01 y sería... ... Aquí ya me he bloqueado. Es que es por esto. Por la diferencia de decimales que hay...

Estudiante 9 (Tarea: $86 \div 222$; Estimación: 2,2; Error: 467,9%): Esto está cerca de 200 y 200 es una parte, o sea, $1/4$ de 1000. Lo puedo ver de esa manera. O sea, $1/5$, perdón, que diga. Bueno ya no sé, ya me he liado. Esto lo redondearía a 100 y podría hacer 100 entre 200, que sería 2,2. El periodo no te lo puedo poner.

Regulación

A continuación presentaremos ejemplos de cambios en la destreza de aproximación, el grado de aproximación, la forma de operar la coma decimal, o el orden en la operación. Los cambios durante la ejecución de una tarea suponen una selección (de destreza de aproximación,...) dentro de la planificación, seguida de una monitorización, en la que se valoran las posibilidades de aplica-

ción de la selección, y de una nueva selección que se considera mejor que la anterior (por producir un cálculo más sencillo o que produzca una estimación más próxima al resultado del cálculo). En todo este proceso de cambio, sólo la selección final, posterior a la monitorización, corresponde a la regulación. A pesar de que el cambio contiene a la vez selección, monitorización y regulación, hemos decidido incluir las categorías de «cambio» dentro del apartado de «regulación» porque los cambios son las situaciones en las que se hace evidente la regulación, mientras que la monitorización (aunque es evidente) suele ser implícita. Se han omitido por brevedad los numerosos ejemplos de repeticiones. Estas se emplean a veces como ayuda para la memoria y otras como comprobación de un resultado parcial. En las repeticiones, igual que en los cambios, se hacen evidentes los procesos de monitorización y de regulación. Se ha decidido excluirlas del presente trabajo por no ser relevantes para valorar los cambios de estrategia que se producen durante el proceso de producir una estimación.

Cambio en la destreza de aproximación (MRC1). Al analizar los protocolos abundan las situaciones en las que los estudiantes eligen primero el truncamiento, para después sustituirlo por el redondeo. Cualquier cambio en una destreza de aproximación (truncamiento, redondeo estándar, redondeo no estándar, uso de potencias de 10, uso de fracciones) encaja en este apartado. Estos cambios son el resultado de valorar conjuntamente la proximidad de los valores iniciales a los valores aproximados y la facilidad de cálculo resultante de la sustitución.

Estudiante 9 (Tarea: 46×771 ; Estimación: 28000; Error: 21,1%): Esto tiende a 50. Esto a 1000. Entonces sería... así. O bien, también por 4 por 7, 28, con tres ceros, sería... 28000.

Se cambia el redondeo (46 a 50) y el uso de potencias de 10 (771 a 1000) por el truncamiento de ambos números (46 a 40 y 771 a 700).

Estudiante 1 (Tarea: 58×244 ; Estimación: 12000; Error: 15,2%): 50. Bueno, 60 por... redondeo a 60. Aquí redondeo a 200 y son 6 por 2, 12. Uno, dos, tres. Añado tres ceros.

Se cambia el truncamiento (58 a 50) por el redondeo (58 a 60). Este aumento supone también una compensación previa al cálculo al truncar 244, sustituyéndolo por 200.

Estudiante 7 (Tarea: $354 \div 88$; Estimación: 5; Error: 24,3%): Lo voy a redondear a 300. No, a ver. Lo voy a redondear a 400 y 40 entre 8 a 5.

Al principio utiliza el truncamiento (354 a 300) pero después, al truncar también 88 a 80, cambia la destreza de aproximación al sustituir 354 a 400, utilizando el redondeo o buscando «números compatibles» para facilitar la operación.

Estudiante 9 (Tarea: $0.962 \div 0.25$; Estimación: 0,25; Error: 93,5%): Aquí redondearía esto, como está más cerca de la unidad, que es 1 en este caso, lo redondearía y haría una división aproximada entre 0,25. Entonces sería 1 entre 0,25... Sería restar dos comas... Es que aquí ya me he liado. El problema es que lo veo un poco abstracto. Pero sería eso. O sea, redondear a 1 y dividirlo entre 0,25, que podría ser también entre $\frac{1}{4}$. Pues 1 entre $\frac{1}{4}$, 0,25.

Comienza redondeando 0.962 a 1 pero, ante la dificultad que le supone dividir 1 entre 0,25 mentalmente, sustituye 0,25 por $\frac{1}{4}$. En este caso, el cambio se produce de no utilizar ninguna destreza de aproximación en el 0.25 al uso de frac-

ciones. La sustitución viene seguida de un error al cambiar la «división por $\frac{1}{4}$ » por la «división por 4».

Estudiante 9 (Tarea: $0.46 \div 0.066$; Estimación: 0; Error: 100,0%): Esto es $\frac{1}{2}$. Tiende a $\frac{1}{2}$. Y esto es... Esto es casi 0,01. Así que podría hacerse $\frac{1}{2}$ entre 0,01 y sería... Aquí ya me he bloqueado. Es que es por esto. Por la diferencia de decimales que hay... Esto, $\frac{1}{2}$, lo podría ver de esta manera, como 0,5 dividido entre 0,01.

El estudiante 9 comienza sustituyendo 0.46 por la fracción $\frac{1}{2}$ y, a continuación, utiliza el cambio por potencias de 10 cometiendo un error (al sustituir 0.066 por 0.01, en lugar de por 0.1). El cambio posterior de destreza de aproximación, al volver a convertir la fracción por un decimal, viene dado por la dificultad que le supone al estimador operar una fracción con un número decimal.

Estudiante 26 (Tarea: $0.059 \div 0.23$; Estimación: 0,5; Error: 94,9%): Pues ésta la vamos a estimar a 0,060 y luego lo voy a dejar en 0,1 y este en 0,2. Es 0,1 entre 0,2. Pues también da 0, y entonces aquí, le pones un 0 al 1. Entonces 10 entre 2, 5. Entonces aquí... Entonces, te queda... claro. Corres la coma (inaudible)... 0,5. Te queda 1 entre 2, 0,5.

En este caso, el estudiante utiliza primero el redondeo pero después utiliza la sustitución por potencias de 10 para simplificar la división posterior por 0,2.

Cambio en el grado de aproximación (MRC2). En este caso, se produce un cambio, dentro del uso de una destreza de aproximación. Generalmente, consiste en un redondeo o un truncamiento a una unidad de un orden distinto. También puede darse al utilizar la sustitución de un decimal por una frac-

ción, al utilizar una fracción más próxima que la inicial al número de partida.

Estudiante 7 (Tarea: 34.1×47.2 ; Estimación: 150; 90,7%): Aquí voy a redondear. Lo voy a dejar en 34 por 50. Y me va a quedar 3 por 5, 15 pues 150.

En primer lugar, redondea 34.1 a las unidades (34) y 47 a 50. Dado que la operación todavía no le parece suficientemente fácil de hacer mentalmente, reduce el grado de aproximación redondeando a las decenas (34 a 30).

Estudiante 3 (Tarea: 2.57×0.72 ; Estimación: 7,5; 305,3%): Nada. Sé que tengo que empezar por 0, pero... Le cojo... Si redondeo a 3, no son 3. Pero con menos y eso... Pondría 7,5. Porque he cogido 2,5 sería por $\frac{1}{2}$ pero lo voy a hacer por $\frac{3}{4}$ porque como se acerca a 0,75.

En este caso hay primero un cambio en la destreza de aproximación, al cambiar el redondeo de 2.57 a 3 por el truncamiento a 2.5. Después, en el segundo número, sustituye 0.72 por $\frac{1}{2}$, para a continuación darse cuenta de que $\frac{3}{4}$ está más próximo a 0.72 que $\frac{1}{2}$, con lo cual aumenta el grado de aproximación. Lo mismo ocurre en el caso siguiente. Primero se sustituye 222 por $\frac{1}{4}$ de 1000 y luego por $\frac{1}{5}$ de 1000.

Estudiante 9 (Tarea: $86 \div 222$; Estimación: 2,2; 467,9%): Esto está cerca de 200 y 200 es una parte, o sea, $\frac{1}{4}$ de 1000. Lo puedo ver de esa manera. O sea, $\frac{1}{5}$, perdón, que diga. Bueno ya no sé. Ya me he liado. Esto lo redondearía a 100 y podría hacer 100 entre 200, que sería 2,2. El periodo no te lo puedo poner.

Cambio en la forma de operar la coma decimal (MRC3). Cuando se realizan estimaciones para operaciones con nú-

meros decimales mayores que 1, es posible eliminar la parte decimal de los números al emplear la destreza de aproximación oportuna obteniendo, la mayoría de las veces, una buena estimación. Los alumnos suelen mostrar una gran dependencia de los algoritmos escritos y tienden por ello a eliminar las comas decimales multiplicando por potencias de diez como primer paso en la operación. En muchas ocasiones, se produce un cambio en la forma de operar la coma decimal, como vemos en los ejemplos siguientes:

Estudiante 22 (Tarea: 78.4×89.5 ; Estimación: 7200; Error: 2,6%): Muevo la coma los dos. Sería... o, no. 800 por 900. 9 por 8, 72. 800 por 900 son dos ceros. ¿Tanto? Esto me parece absurdo. No. Mejor. A ver. Es que esto es una tontería. Mejor 80 por 90. Eso. 8 por 9, 72. 80 por 90. Y dos ceros. (Escribe 7200). Así.

En este caso, el alumno elimina primero las comas decimales de cada uno de los números y después los redondea. Ante la dificultad de operar con tantos ceros, quizá olvidando que al final debe eliminar dos ceros, cambia la forma de operar la coma decimal y redondea para eliminar directamente los ceros. En el primer caso, llegaba a la operación $(800 \times 900) \div 100$, y en el segundo a 80×90 . Lo mismo sucede en el ejemplo siguiente, en el que el estudiante 25 piensa primero en eliminar las comas multiplicando ambos números por 100 o por 10, para luego eliminarlas por medio del redondeo.

Estudiante 25 (Tarea: $85.9 \div 3.42$; Estimación: 20; Error: 20,4%): Y aquí multiplico por 100, en este lado, y corro la coma dos lugares. Aquí hago lo mismo. No. Mejor. Multiplíco por 10. Corro la coma un lugar y me quedan 34,2 entre... Ah bueno.

Espérate. 85,9 entre 3,42. Vale. Pues esto puede ser 80 entre 4. Vale. 80 entre 4 que sería 20.

Algunos alumnos realizan el cambio en un sentido inverso. Por ejemplo, en el caso siguiente, se empieza empleando el redondeo para eliminar la parte decimal de los números para luego rectificar y eliminar los decimales multiplicando por 100 el dividendo y el divisor. El error se produce al multiplicar el divisor sólo por 10 en lugar de hacerlo por 100.

Estudiante 5 (Tarea: $9.88 \div 25.6$; Estimación: 4; Error: 936,4%): Y esto son 10 entre 25. A ver. Son, quito la coma para allá y son 250 y aquí igual. Y son 98,8, 250, que son 1000 entre 250, que son... a 4... a 4.

Cambio de orden en la operación (MRC4). Es cuando se hace un cambio en el orden en que se operan dos números o en el orden en que se ejecutan dos pasos dentro de la implementación de un algoritmo.

Estudiante 20 (Tarea: 2.57×0.72 ; Estimación: 1,4; Error: 24,3%): Esto multiplico. Voy a utilizar este número como 250. Este número como 0,75. 250 por 0,75 es como multiplicar 250 por $\frac{3}{4}$. 250 entre 4. Bueno, voy a hacer primero por 3, son 750. Entre 4 son un poco menos de 140. Y tengo que quitar dos comas. O sea, 1,4.

Para multiplicar 250 por $\frac{3}{4}$, el alumno decide inicialmente dividir 250 por 4, para después multiplicar por 3. En esta ocasión, el cambio se produce en el or-

den en que se realizan estas dos operaciones, al multiplicar primero por 3, para luego dividir por 4. También hay bastantes ejemplos de cambios de orden para la recuperación de hechos numéricos básicos de la «tabla de multiplicar», cuando no se recuerda el producto de dos números. Este caso podemos verlo en el siguiente ejemplo:

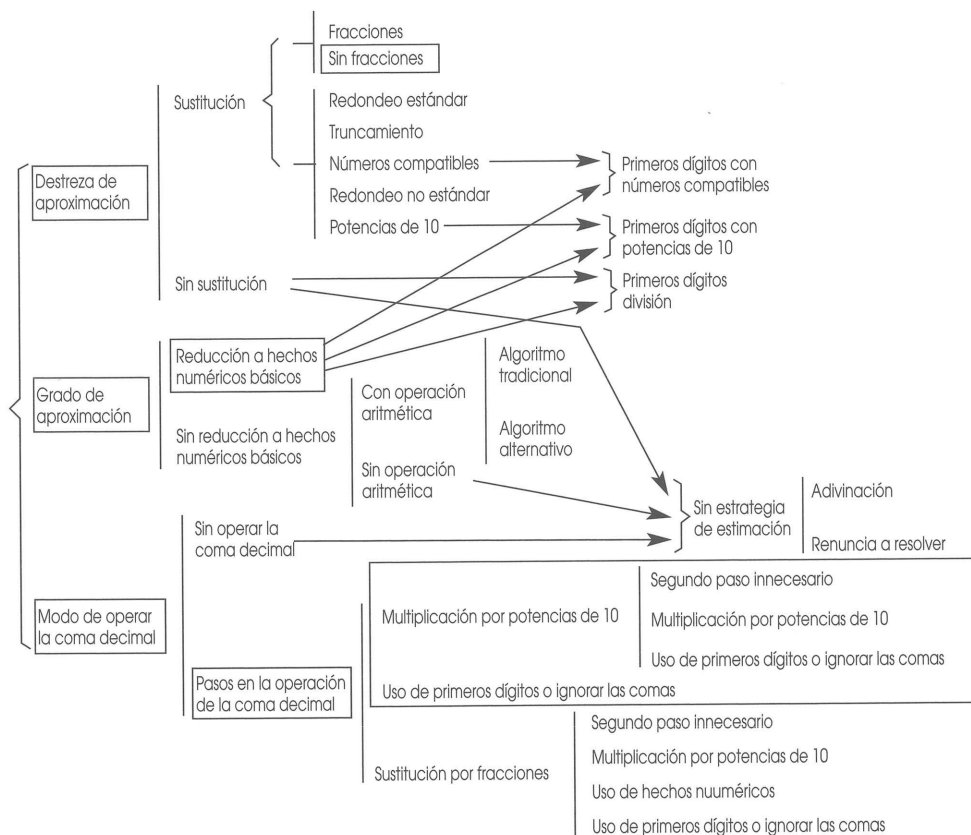
Estudiante 32 (Tarea: 0.45×7.85 ; Estimación: 0.0028; Error: 99,9%): Aquí multiplico normal. O sea. 4 por 7. Aquí multiplico 7 por 4, 28 y cuento los decimales que tengo a la derecha de cada uno. Entonces 1, 2, 3, 4. Entonces 28, 1, 2, 3, 4. ¡Ay no! Pero que... pongo encima... vale. 28. Entonces cuento que hay cuatro ceros. 0,... 0,0028.

Conclusiones e implicaciones

En este trabajo, consideramos las estrategias de estimación como configuraciones dentro de las redes sistémicas de Bliss, Monk, y Ogborn (1983). Pensamos que las redes sistémicas constituyen un instrumento fundamental para entender los procesos de estimación. En ellas se pueden mostrar las variables principales que intervienen en dichos procesos: las destrezas de aproximación, el grado de aproximación, los algoritmos empleados para operar los números y la forma de operar la coma decimal⁴.

⁴ Variable que no se había tenido en cuenta explícitamente en trabajos de estimación, pero sí en trabajos de cálculo mental (Gómez, 1995).

**Análisis metacognitivo de protocolos en tareas de estimación:
Una reflexión sobre el carácter estratégico de los procedimientos de cálculo**



bastantes ejemplos de cambios de orden para la recuperación de hechos numéri-

cos básicos de la «tabla de multiplicar», cuando no se recuerda el producto de dos números. Este caso podemos verlo en el siguiente ejemplo:

Estudiante 32 (Tarea: 0.45×7.85 ; Estimación: 0.0028; Error: 99,9%): Aquí multiplico normal. O sea. 4 por 7. Aquí multiplico 7 por 4, 28 y cuento los decimales que tengo a la derecha de cada uno. Entonces 1, 2, 3, 4. Entonces 28, 1, 2, 3, 4. ¡Ay no! Pero que... pongo encima... vale, 28. Entonces cuento que hay cuatro ceros. 0,... 0,0028.

Conclusiones e implicaciones

En este trabajo, consideramos las estrategias de estimación como configuraciones dentro de las redes sistémicas de Bliss, Monk, y Obgorn (1983). Pensamos que las redes sistémicas constituyen un instrumento fundamental para entender los procesos de estimación. En ellas se pueden mostrar las variables principales que intervienen en dichos procesos: las destrezas de aproximación, el grado de aproximación, los algoritmos empleados para operar los números y

En este trabajo, hemos adoptado la posición de que lo importante no es diferenciar entre técnicas y estrategias sino de «diferenciar cuando un mismo procedimiento se usa de un modo técnico o rutinario y cuándo se utiliza de un modo estratégico» (Mateos, 2001, p. 44). Así, «la técnica se convierte en estrategia cuando se tiene conocimiento sobre cuándo, cómo y dónde usarla» (Mateos, 2001, p. 26). Siguiendo a esta autora, un mismo procedimiento puede emplearse de forma estratégica, cuando nos enfrentamos a un problema nuevo, o de forma rutinaria, cuando debemos resolver un problema familiar.

En la red sistémica propuesta en la Figura 1 se hacen evidentes las decisiones que es «obligatorio tomar» para producir una estimación, así como los puntos clave del proceso en los que es posible realizar cambios en el mismo, dando lugar a regulaciones. Las redes sistémicas, al emplearse para representar los procesos de estimación, muestran el carácter estratégico de los procedimientos que se emplean al estimar.

Estamos de acuerdo con Sowder (1994) en que las reflexiones que hacemos sobre los elementos metacognitivos, de-

fectados en los procedimientos que usan los estudiantes al estimar, tienen importantes implicaciones de cara a la enseñanza de la estimación. La enseñanza de la estimación no debería plantearse, como a veces ha ocurrido con la aritmética, como una enseñanza de procedimientos. En su lugar, debería considerarse dentro del ámbito de la resolución de problemas. En una circunstancia así, los aspectos de selección de destreza y grado de aproximación, adecuados para el contexto del problema, se impondrían a la ejecución mecánica de procedimientos aprendidos de estimación. El aspecto estratégico del procedimiento se sobrepondría al rutinario. En este sentido podemos decir que el estudio de los elementos metacognitivos y el uso de redes sistémicas nos ayudan a destacar el carácter estratégico de los procedimientos de cálculo. Esto será especialmente importante si deseamos desarrollar en los alumnos un tipo de «destreza o pericia adaptativa» («adaptive expertise» es el término propuesto por Hatano, 1988) para enfrentarse a tareas matemáticas nuevas adaptándose a ellas con flexibilidad, en lugar de una «destreza rutinaria», que permita el dominio rígido de una serie de técnicas aprendidas de forma aislada.

Dirección de contacto:

Carlos de Castro Hernández
Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle
C/ La Salle, 10
28023 MADRID
E-mail: c.castro@eulasalle.com

Enrique Castro Martínez e Isidoro Segovia Álex
Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada
Campus de Cartuja
18071 GRANADA
E-mail: ecastro@ugr.es y isegovia@ugr.es

Referencias

- ARTZT, A. F., & ARMOUR-THOMAS, E. (1992). Development of a cognitive-metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. *Cognition and Instruction*, 9(2), 137-175.
- BLISS, J., MONK, M., & OBGORN, J. (1983). *Qualitative data analysis for educational research: A guide to uses of systemic networks*. London & Sydney: Croom Helm.
- CASTRO, E. (1991). *Estudio sobre resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- COCKCROFT, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: MEC.
- DE CASTRO, C., SEGOVIA, I., & CASTRO, E. (2002). An alternative model for the description of computational estimation strategies. In A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 193-200). Norwich, UK.
- DOWKER, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 45-55.
- DOWKER, A., FLOOD, A., GRIFFITHS, H., HARRIS, L., & HOOK, L. (1996). Estimation strategies of four groups. *Mathematical Cognition*, 2(2), 113-135.
- DAVIDSON, J. E., & STERNBERG, R. J. (1998). Smart problem solving: How metacognition helps. In D. J. Hacker, J. Dunlosky, & A. C. Graesser (Eds.), *Metacognition in educational theory and practice* (pp. 47-68). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- DAVIDSON, J. E., DEUSER, R., & STERNBERG, R. J. (1996). The role of metacognition in problem solving. In J. Metcalfe, & A. P. Shimamura (Eds.), *Metacognition: Knowing about knowing* (pp. 207-226). Cambridge: MIT Press.
- FLAVELL, J. H. (1987). Speculations about the nature and development of metacognition. In F. E. Weinert and R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, Motivation and Understanding* (pp. 21-30). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- GAROFALO, J., & LESTER, F. K., JR. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 163-76.
- GÓMEZ, B. (1995). Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: Un análisis en la formación de maestros. Granada: Comares.
- KLUWE, R. H. (1982). Cognitive knowledge and executive control: Metacognition. In D. R. Griffin (Ed.), *Animal mind-Human mind* (pp. 201-224). Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.

- KLUWE, R. H. (1987). Executive decisions and regulation of problem solving behavior. In F. E. Weinert, & R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation, and understanding* (pp. 31-63). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- LEFEVRE, J., GREENHAM, S. L., & WAHEED, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction*, 11(2), 95-132.
- LEMAIRE, P., LECACHEUR, M., & FARIOLI, F. (2000). Children's strategy use in computational estimation. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 54(2), 141-148.
- LEVINE, D. R. (1980). *Computational estimation ability and the use of estimation strategies among college students*. Doctoral dissertation. New York University.
- LEVINE, D. R. (1982). Strategy use and estimation ability of college students: *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 350-359.
- HANSON, S. A., & HOGAN, T. P. (2000). Computational estimation skill of college students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 483-499.
- HATANO, G. (1988). Social and motivational bases for mathematical understanding. *New Directions for Child Development*, 41, 55-70.
- MATEOS, M. (2001). *Metacognición y educación*. Buenos Aires: Aique.
- NEWELL, A., SIMON, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- POLYA, G. (1995). *Cómo plantear y resolver problemas*. México, DF: Trillas. (Decimonoventa reimpresión de la primera edición de 1965 de la traducción al castellano del libro: Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.)
- REYS, R. E., BESTGEN, B. J., RYBOLT, J. F., & WYATT, J. W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(3), 183-201.
- REYS, B. J., REYS, R. E., & FLORES, A. (1991). Estimation performance and strategy use of Mexican 5th and 8th grade student sample. *Educational Studies in Mathematics*, 22(4), 353-375.
- REYS, R. E., REYS, B. J., NOHDA, N., ISHIDA, J., YOSHIKAWA, S., & SHIMIZU, K. (1991). Computational estimation performance and strategies used by fifth and eighth-grade Japanese students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(1), 39-58.
- REYS, R. E., TRAFTON, P. R., REYS, B. J., & ZAWOJEWSKI, J. S. (1987). *Computational estimation. Grade 6*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.
- SCHOENFELD, A. H. (1983). Episodes and executive decisions in mathematical problem solving. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 345-395). New York: Academic Press.

*Análisis metacognitivo de protocolos en tareas de estimación:
Una reflexión sobre el carácter estratégico de los procedimientos de cálculo*

SCHOENFELD, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FA: Academic Press.

SEGOVIA, I., CASTRO, E., CASTRO, E. Y RICO, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.

SOWDER, J. T. (1994). Cognitive and metacognitive processes in mental computation and computational estimation. In R. E. Reys, & N. Nohda (Eds.), *Computational alternatives for the twenty-first century. Cross-cultural perspectives from Japan and the United States* (pp. 139-46). Reston, Va: NCTM.