

Fenómenos que organizan el límite: diseño de un instrumento

*María Teresa Sánchez Compañá, Francisco Javier Claros Mellado y
Moisés Coriat Benarroch
Universidad de Granada*

Resumen

En este documento presentamos los pasos seguidos para la elaboración de un instrumento destinado a detectar los fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación, presentes en el límite finito de una sucesión, en las respuestas y justificaciones de los alumnos. Una prueba piloto se administró a alumnos de 2.º de bachillerato de ciencias sociales y ha servido de base para obtener una serie de conclusiones las cuales nos han permitido elaborar un nuevo cuestionario. El documento presenta los enunciados de las nuevas cuestiones, las cuales han sufrido ciertas modificaciones respecto a las originales, de acuerdo con los resultados obtenidos en la prueba piloto. El último apartado recoge las perspectivas y objetivos que se pretenden obtener con dicho cuestionario.

Palabras clave

Límite, sucesión, fenómeno, cuestionario, alumnos.

Abstract

In this document we present several steps intended to build an instrument oriented to detect the so called intuitive

approach and feedback phenomena organising the concept of limit of a set. A test was administered to students of the second course of high school of Social Sciences, and served as a basis to obtain conclusions for a definitive questionnaire, which, hopefully, will allow for the development and attainment as our PhD works. We show the statements of the new questions, and explain the differences with the former questionnaire, in agreement with the results obtained in the test pilot. The last section gathers the perspective and purposes of the instrument.

Key words

Limit, succession, phenomena, questionnaire, pupils.

Introducción

Nuestro análisis fenomenológico (Puig, 1997) del concepto de límite pone al descubierto la presencia de dos fenómenos específicos de diferente naturaleza, a los que hemos denominado genéricamente *aproximación intuitiva* y *retroalimentación*.

Los fenómenos de aproximación intuitiva y de retroalimentación o ida-vuelta presentes en el límite de sucesiones y de

funciones ya fueron descritos en Huesca (Claros, Sánchez y Coriat, 2006). En este documento explicamos solamente, los fenómenos asociados al concepto de límite de una sucesión.

Aproximación simple intuitiva (asi). Se consideran k términos ordenados (generalmente consecutivos) de una sucesión: $(1, a_1), (2, a_2), \dots, (k, a_k)$.

Fenómeno observado: Al inspeccionar la secuencia de valores $a_1, a_2, \dots, a_k$, parecen acercarse a un valor.

Modelo: En la sucesión $(1, 2/1), (2, 2/2), (3, 2/3), (4, 2/4), \dots$, el término $2/n$ parece acercarse a cero a medida que n crece.

Fenómenos de retroalimentación en sucesiones (ivs). Se considera una sucesión (n, a_n) y la definición de límite de una sucesión. Fenómenos observados con ayuda de la sucesión y de la definición:

1. Se afirma la existencia de una función natural de variable real $(\varepsilon, N(\varepsilon))$.
2. Se construye efectivamente dicha función.

Modelo: Partiendo la sucesión $(n, 1/n)$ se construye la función $(\varepsilon, E(1/\varepsilon) + 1)$ donde E designa la función parte entera.

Hemos buscado la evidencia empírica de estos fenómenos en los libros de texto y esperamos próximamente presentar un informe al respecto. En un estudio sobre libros de textos del periodo 1990-2005 (periodo LOGSE), que fue presentado en la X SEIEM se observó la presencia de estos fenómenos en los libros de texto, y se mostraron casos concretos de presencia de los fenómenos *asi* e *ivs* en el sistema de representación verbal y en el formato definición. También hemos buscado una evidencia empírica de

estos fenómenos en las producciones de los alumnos. La conjetura es simple: si los profesores usan actualmente como instrumento principal de trabajo el libro de texto, y en los libros de texto están presentes los fenómenos descritos anteriormente, los alumnos los emplearán en sus respuestas y justificaciones.

La prueba piloto tuvo, como objetivo principal, el de observar la presencia de estos fenómenos en las respuestas dadas por los alumnos a las cuestiones presentadas.

1. Elaboración del instrumento

Para la producción de la prueba definitiva que se administrará a los alumnos, se dieron los siguientes pasos:

- Elaboración de un cuestionario inicial, compuesto por 12 preguntas.
- Revisión del cuestionario inicial por los expertos.
- Elaboración de la prueba piloto, teniendo en cuenta la consulta realizada a expertos.
- Realización del cuestionario por parte de los alumnos.
- Estudio crítico de las respuestas para decidir el cuestionario definitivo.

Describiremos estos pasos y las razones que los justifican.

Este apartado lo hemos dividido en tres partes: diseño inicial de la prueba, consulta a expertos y resultado de la consulta a expertos. En el apartado 2 se describen con detalle los otros pasos.

1.1. Elaboración de un cuestionario inicial

En Claros, Sánchez y Coriat (2006), presentamos un resumen de un estudio

mucho más amplio sobre libros de texto, en el que observamos la presencia de los fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación en los libros del periodo LOGSE (1990-2005). Este documento presentó solamente resultados relativos al periodo LOGSE, pero en el estudio completo, se habían considerado diferentes periodos educativos y se había analizado la presencia de los fenómenos *así e ivo*, en cada uno de ellos. Para la elaboración de este estudio sobre libros de texto, se tomó como referencia el documento de Sierra Vázquez, M., González Astudillo, M. T. y López Esteban, C. (1999).

En el documento Claros, Sánchez y Coriat (2006), señalábamos la mayor presencia de los fenómenos de aproximación intuitiva en detrimento de los fenómenos de retroalimentación o ida-vuelta.

Esto condujo a observar, en las producciones de los alumnos, los fenómenos de aproximación intuitiva. Elegimos como fenómenos: *así* verbal ejemplo, *así* gráfica ejemplo y *así* simbólica ejemplo porque no encontramos ningún ejemplo de ella en los libros analizados del periodo LOGSE.

La elaboración del cuestionario inicial, tuvo en cuenta las siguientes variables:

1.º Se distinguió entre sucesión creciente y sucesión decreciente, porque consideramos que el carácter creciente o decreciente de una sucesión podría influir en las respuestas obtenidas. Pretendíamos, por lo tanto, detectar casos como el siguiente: un alumno dice que la sucesión $1/n$ decrece siempre y su límite por lo tanto es $-\infty$, mientras que la sucesión $3-1/n$ crece y su límite es 3 porque nunca llega a pasar de 3.

- 2.º Se distinguió entre enunciado matemático y enunciado de la vida cotidiana, porque los enunciados del último tipo ayudan a los alumnos a ver la aplicación de los conceptos matemáticos y esto puede hacer que se impliquen más en sus respuestas.
- 3.º Una cuestión importante relativa a los sistemas de representación, es seleccionar cuales son mas adecuados para el concepto de limite (Rico, 2000). Se presentaron cuestiones en las que se emplearon los sistemas de representación verbal, gráfico y tabular. En los enunciados aparecieron los fenómenos de aproximación intuitiva verbal, gráfica y tabular, por las razones comentadas anteriormente.
- 4.º Todas las sucesiones presentadas tienen límite finito, y además es único. Esto es un requisito de nuestra investigación (ver el apartado «enunciados de las preguntas»).

Una vez elaborado el cuestionario inicial se pidió a un grupo de expertos que lo evaluaran.

1.2. Consulta a expertos

Para avanzar en la prueba piloto, se suministró una copia a 5 profesores del departamento de matemáticas del IES José Hierro, donde uno de nosotros (JCM) ejerce. El departamento está formado por más profesores, pero solamente hay 5 que se han ocupado en algún momento de enseñar el concepto de límite de una sucesión.

A la entrega del cuestionario se les hace una aclaración previa: no se trata de examinarlos a ellos, sino de ver si las preguntas del cuestionario son «adecuadas» para el estudio del concepto del límite de una sucesión. A los profesores se les presentan 12 preguntas; entre las

relativas a «problemas de la vida diaria» en los que aparece el concepto de límite de una sucesión, se les pide que anoten sus sugerencias en el propio cuestionario. En ningún momento se les explicó nada relativo a los fenómenos que deseamos observar, sólo se pidió la «adecuación» de las cuestiones enunciadas.

El término «adecuada» es usado de manera intencionadamente genérica, para dejar un campo abierto a sus posibles críticas.

1.3. Resultados de la consulta a expertos

Como consecuencia de las consideraciones de los expertos, extrajimos las siguientes conclusiones:

- 1) Suprimir los «problemas de la vida real», ya que ponían en juego connotaciones que no parecen necesarias para nuestro estudio. Por ejemplo: en un problema sobre economía, empleábamos el enunciado:
El enriquecimiento de una persona sigue la siguiente sucesión, medida en millones de euros:
 $8'9, 8'99, 8'999, 8'9999, \dots$
Según este ejemplo deberíamos manejar infinitas cifras decimales, pero no tiene sentido hacer esto, ya que las cifras a partir del octavo decimal son despreciadas en economía.
- 2) Suprimir la distinción entre sucesión creciente y decreciente, porque los profesores expertos consideraron que las tareas en las que se distinguía en un mismo sistema de representación entre sucesión creciente y decreciente, no discriminaban sobre el concepto propiamente dicho.
- 3) Eliminar el término general, de aquellas preguntas en las que aparecía, para evitar que los alumnos empleen teoremas sobre el cálculo de límites,

en lugar de usar el sistema de representación que a continuación se les presentaba.

Teniendo en cuenta estos resultados el cuestionario definitivo quedó reducido a tres cuestiones:

En la primera se empleo el fenómeno *así* gráfico, en la segunda el fenómeno *así* tabular y en la tercera el fenómeno *así* verbal. Esta tarea se enuncia sólo con palabras, y consta de dos apartados. En el primero emplearemos el fenómeno *así* verbal y en el segundo el fenómeno de ida-vuelta verbal. Queríamos saber con esta pregunta si era posible detectar este fenómeno de retroalimentación, por considerarlo muy cercano a lo que normalmente se explica en las clases.

2. La prueba piloto

La prueba piloto es la antesala de un cuestionario mucho más perfilado y que se pasará a una muestra más amplia, en el mes de Marzo o Abril de 2007. La muestra no será representativa y estará formada por alumnos de 1.º y 2.º de bachillerato tanto de ciencias sociales como de ciencias de la salud y bachillerato tecnológico, de diferentes institutos de la comunidad de Madrid.

La administración de la prueba piloto está destinada a detectar los posibles errores que se hayan cometido en diferentes aspectos: redacción del enunciado de la pregunta, preguntas que den demasiada información al alumno sobre su posible respuesta, preguntas alejadas de la realidad matemática educativa, etc. Además de estas consideraciones, la prueba piloto tiene una serie de objetivos relativos a los fenómenos de aproximación intuitiva y de retroalimentación en sucesiones.

Este apartado se ha estructurado en cinco secciones:

- 2.1. Descripción de la muestra.
- 2.2. Cuestionario y estudio de las respuestas obtenidas.
- 2.3. Resumen gráfico de los datos obtenidos.
- 2.4. Ejemplos de respuestas dadas por los alumnos.
- 2.5. Conclusiones.

2.1. Descripción de la muestra

La prueba piloto se ha pasado a ocho alumnos de 2.º de bachillerato de ciencias sociales, del IES José Hierro de Getafe (Madrid). El criterio de selección de la muestra fue el siguiente: «se eligieron aquellos alumnos que estaban trabajando en clase de manera individual». Se eligió este criterio, dejando fuera de esta selección a 7 alumnos que estaban sentados en grupos de tres y de dos, como un criterio de selección que no alterase el ritmo de la clase. De esta manera, un grupo de 8 alumnos realizó un cuestionario, que no era un examen, porque no lo hacían todos, y los otros hicieron los ejercicios de clase mandados por el profesor. Se pretendió crear ante la prueba un clima de naturalidad, como un ejercicio de clase. La clase estaba compuesta por 15 alumnos y hay que reseñar el interés que mostraron sobre las cuestiones presentadas.

Se pidió que rellenaran unos datos de clasificación, necesarios para conocer su trayectoria escolar. Los datos solicitados fueron: nombre, curso, centro, nota de matemáticas en el curso anterior, edad, sexo, asignatura de matemáticas que cursan, y libro de texto que estaban manejando. Se preguntó si repetían curso o no.

Los resultados arrojaron los siguientes datos:

- Hay solamente un repetidor.
- El libro que manejan es de la editorial S. M. (Anzola González, M. y Vizmanos Buelta, J. (2002) «*Algoritmo, matemáticas aplicadas a las ciencias sociales 2*»)
- El rango de notas varía entre 5-7. Además hay un alumno que el año pasado no se presentó a ningún examen de Matemáticas (alumno repetidor). Dos alumnos no contestaron a esta pregunta.

2.2. Cuestionario y estudio de las respuestas obtenidas

2.2.1. Objetivos

Objetivos generales. Los objetivos generales de este cuestionario son:

1. Detectar la presencia de los fenómenos de aproximación intuitiva en sucesiones, en las respuestas de los alumnos.
2. Poner de manifiesto que los alumnos no manejan los fenómenos de retroalimentación en sucesiones.
3. Observar si los sistemas de representación usados en los enunciados de las preguntas (verbal, gráfico y tabular), tienen alguna influencia en las respuestas de los alumnos.
4. Detectar errores debidos a la mala elaboración del cuestionario.

Objetivos específicos. Además de estos objetivos generales, cada pregunta tenía un objetivo específico bien definido que ayudaba a la consecución de los objetivos generales definidos anteriormente. Estos objetivos específicos se enuncian a continuación:

1. El objetivo de la primera cuestión es observar si el alumno tiene una «visión

intuitiva» del concepto de límite expresada a través de la aproximación simple intuitiva gráfica en ejemplo. Queremos también conocer qué fenómenos emplea en sus justificaciones.

2. El objetivo de la segunda cuestión es observar si el alumno tiene una «visión intuitiva» del concepto de límite expresada a través de la aproximación simple intuitiva tabular en ejemplo. Queremos también conocer qué fenómenos emplea en sus justificaciones.
3. La cuestión número tres tiene dos objetivos, uno por cada uno de los apartados que la componen:
 - 3.1. El objetivo del apartado «a» de la tercera cuestión es observar si el alumno tiene una «visión intuitiva» del concepto de límite expresada a través de la *aproximación simple intuitiva verbal en ejemplo*. Queremos también conocer qué fenómenos emplea en sus justificaciones.
 - 3.2. El objetivo del apartado «b» de la tercera cuestión es observar si el

alumno reconoce y emplea el fenómeno de *ida-vuelta en sucesiones verbal en ejemplo*. Queremos también conocer qué fenómenos emplea en sus justificaciones.

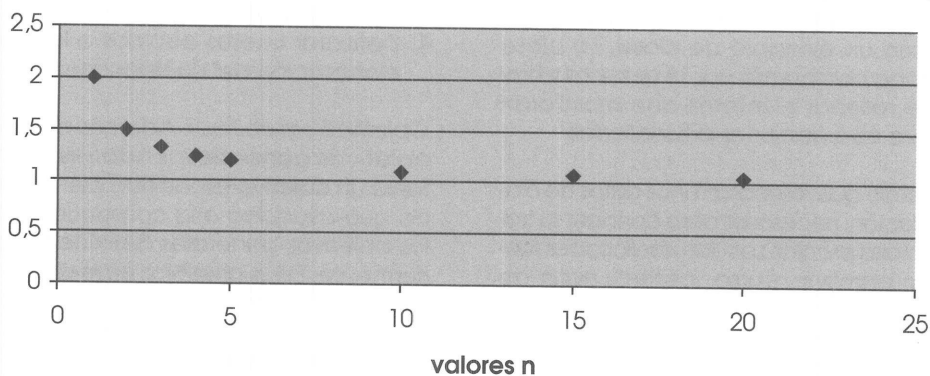
2.2.2. Enunciados de las preguntas

El cuestionario definitivo quedó reducido a tres cuestiones. Se administró a los alumnos el día 19 de diciembre de 2006 y para su elaboración, tuvo en cuenta, como hemos comentado anteriormente, las consideraciones del grupo de expertos.

Los enunciados de las cuestiones tuvieron la siguiente estructura: El profesor preguntaba a la clase si la sucesión presentada tenía límite. A continuación un alumno ficticio daba una respuesta. Se pedía si estaban de acuerdo con la respuesta del alumno y además que justificasen la respuesta.

La cuestión n.º 1 fue la siguiente. (Véase el objetivo específico 1)

- 1) Se representa gráficamente una sucesión El profesor pregunta a la clase: ¿Tiene límite la sucesión? Un alumno responde: «El límite es 1 porque a medida que n crece los valores de la sucesión se van acercando cada vez mas a 1» ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta.



La cuestión n.º 2 fue la siguiente. (Véase el objetivo específico 2)

2) Dada la siguiente sucesión:

n	a_n
1	1.9
2	1.99
3	1.999
4	1.9999
5	1.99999
6	1.999999
7	1.9999999
8	1.99999999
.....	

El profesor pregunta a la clase: ¿Tiene límite la sucesión? Un alumno responde: «El límite es 2, porque a medida que n crece los valores de la sucesión se van acercando cada vez más a 2» ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta.

La cuestión n.º 3 fue la siguiente. (Véase el objetivo específico 3)

3) La sucesión siguiente cumple: su primer término vale 3.9, su segundo término vale 3.99, su tercer término vale 3.999, su cuarto término 3.9999, su quinto término 3.99999, su sexto término 3.999999, su séptimo término 3.9999999, su octavo término 3.99999999 y así sucesivamente.

- Un alumno afirma: «Esta sucesión tiene límite 4, porque a medida que avanza n su valor va acercándose cada vez más a 4» ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta
- Otro alumno afirma: «Esta sucesión tiene límite 4, porque para cualquier entorno de 4 que tomemos, se cumple que existe un término de la sucesión a partir del cual todos los términos de la sucesión quedan dentro de ese entorno» ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta.

2.2.3. Categorías para el análisis de las respuestas

Las categorías que se presentan han sido extraídas de las respuestas dadas a las cuestiones presentadas. Se han establecido seis categorías.

Categoría C1: «Justifica empleando la respuesta dada en el enunciado».

Categoría C2: «Contesta erróneamente».

Categoría C3: «Identifica la afirmación que aparece en el enunciado de la cuestión como la definición de límite».

Categoría C4: «Responde bien y justifica su respuesta».

Categoría C5: «Plantea la necesidad de conocer más valores de « x » o « $f(x)$ »».

Categoría C6: «No sabe /No contesta».

2.2.4. Resumen de las respuestas obtenidas

Vamos a analizar las respuestas dadas por los alumnos a las cuestiones presentadas. La tabla 1 resume los resultados obtenidos. Cada respuesta dada por un alumno ha sido anotada con el símbolo «X».

	Cuestión n.º 1	Cuestión n.º 2	Cuestión n.º 3 Apartado «a»	Cuestión n.º 3 Apartado «b»	Leyenda
C1	X ¹ , X, X, X, X	X ² , X, X, X, X	X, X, X		X ¹ indica una respuesta a la cuestión n.º 1 que puede clasificarse co- mo respuesta tipo 1 y como respuesta tipo 5. X ² indica una respues- ta a la cuestión n.º 2 que puede clasificarse como respuesta tipo 1 y como respues- ta tipo 5.
C2	X	X	X, X		
C3	X				
C4	X	X	X		
C5	X ¹	X ²			
C6		X	X, X	X, X, X, X, X, X, X, X	

Tabla 1. Resumen de respuestas de los alumnos a las distintas cuestiones.

La tabla 2 recoge las frecuencias absolutas asociadas a cada una de las categorías reseñadas. Observamos que C1 es la categoría más frecuente, con una frecuencia absoluta de 13 y que C3 es la menos frecuente, con una frecuencia absoluta de 1.

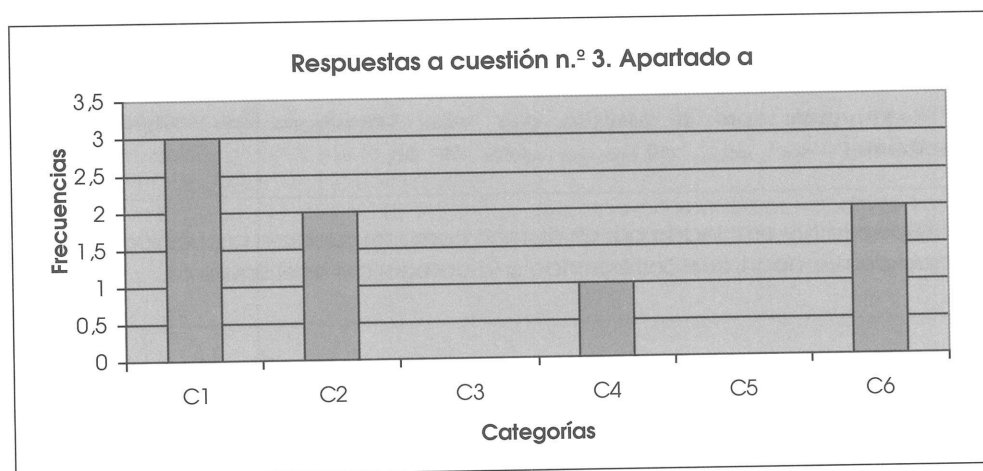
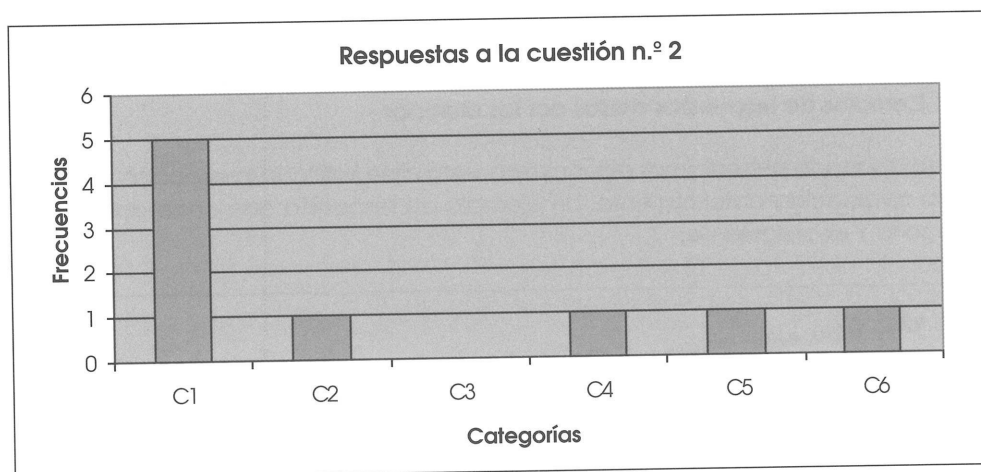
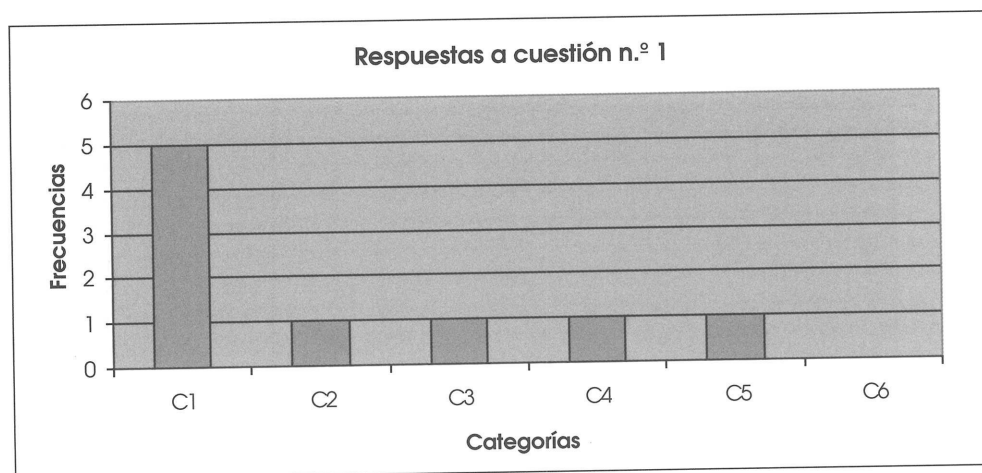
Categorías	Frecuencias
C1	13
C2	4
C3	1
C4	3
C5	2
C6	11

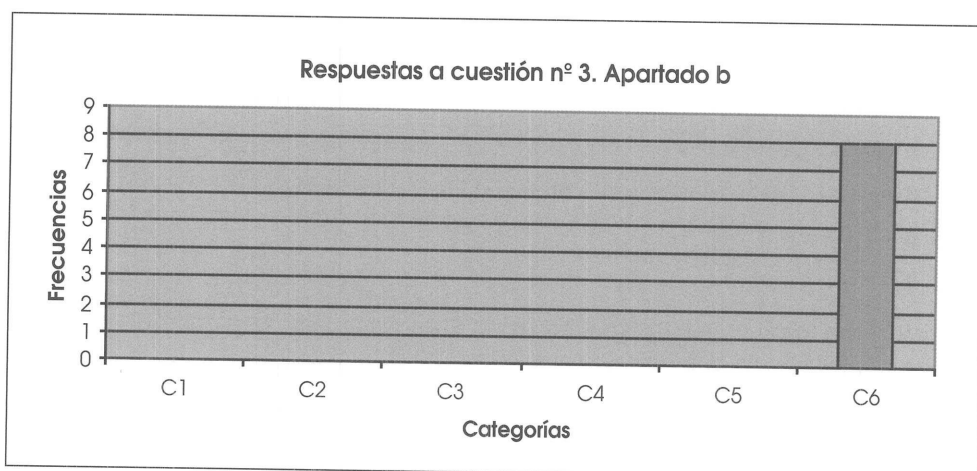
Tabla 2. Frecuencia asociada a cada categoría.

2.3. Resumen de los resultados obtenidos

Hemos utilizado diagramas de barras y hemos empleado uno por cada una de las preguntas o apartados del cuestio-

nario. Los diagramas de barras presentan en el eje X, las distintas categorías que han sido establecidas en 2.2.3 (C1, C2, C3, C4, C5, C6), y en el eje Y las frecuencias absolutas asociadas a cada una de las categorías.





2.4. Ejemplos de respuestas dadas por los alumnos

En este apartado presentamos algunas respuestas que justifican la selección de categorías establecida anteriormente. Un ejemplo de respuesta que corresponde a la categoría 1 es el siguiente:

Si estoy de acuerdo porque a medida que aumenta n los valores de la sucesión van acercándose cada vez más a 1.

Esta respuesta fue empleada por un alumno como respuesta a la cuestión n.º 1. Un ejemplo de respuesta que corresponda a la categoría 2 es el siguiente:

No, yo creo que a medida que van creciendo los valores de la sucesión se van alejando más de 2.

Esta respuesta fue empleada por un alumno como respuesta a la cuestión n.º 2. Un ejemplo de respuesta que corresponda a la categoría 3 es el siguiente:

Si, porque esa es la definición de límite, y vemos, se va acercando,

Esta respuesta fue empleada por un alumno como respuesta a la cuestión n.º 1. Un ejemplo de respuesta que corresponda a la categoría 4 es el siguiente:

Si, estoy de acuerdo porque aunque aumentes mucho la sucesión, es decir, por ejemplo 12 el resultado sería 1'999999999999, nunca sobrepasa dos, ya que la sucesión consiste en poner tantos 9 como nº de sucesión.

Esta respuesta fue empleada por un alumno como respuesta a la cuestión n.º 2. Un ejemplo de respuesta que corresponda a la categoría 5 es el siguiente:

En principio sí, pues se van acercando los valores cada vez más a 1, pero no lo llega a sobrepasar. Para estar completamente seguro debería conocer más valores de x o mejor aún cuál es la función.

Esta respuesta fue empleada por un alumno como respuesta a la cuestión n.º 1. Un ejemplo de respuesta que corresponda a la categoría 6 es el siguiente:

No se

Esta respuesta fue empleada por un alumno como respuesta a la cuestión n.º 3.

2.4.1. Ejemplo de respuestas que pertenecen a la categoría 4 (C4)

En este apartado queremos presentar ejemplos de respuestas que pertenecen a la categoría 4 (C4), con el fin de mostrar cómo hemos clasificado respuestas que corresponden a diferentes preguntas, dentro de una misma categoría.

Ejemplo de respuesta a la cuestión n.º 1, clasificada dentro de la categoría 4 (C4):

Si, estoy de acuerdo ya que la función se acerca cada vez más a 1 pero nunca lo pasa.
Se puede observar en la gráfica que los valores de x cada vez son mayores pero la función nunca es menor que 1.

Ejemplo de respuesta a la cuestión n.º 2, clasificada dentro de la categoría 4 (C4):

Si, estoy de acuerdo porque aunque aumentes mucho la sucesión, es decir, por ejemplo si el resultado sería 1'999999999999, nunca sobrepasa dos, ya que la sucesión consiste en poner tantos 9 como nº de sucesión.

Ejemplo de respuesta a la cuestión n.º 3, apartado «a», clasificada dentro de la categoría 4 (C4):

a) Si, estoy de acuerdo porque aunque el término sea muy grande nunca sobrepasa el 4, es decir, (como el ejercicio anterior) la sucesión es 3 seguido de tantos nueve decimales como indique el la posición del término de la sucesión.

2.5. Conclusiones obtenidas del análisis

En este apartado presentamos las conclusiones obtenidas de las respuestas dadas por los alumnos a las cuestiones presentadas. Al final de este apartado realizaremos un resumen de los objetivos generales y específicos que se han alcanzado y también de aquellos que no se han alcanzado:

1. Los alumnos no conocen el concepto de entorno. Esto hace que no entiendan el enunciado dado en la pregunta n.º 3, apartado b) y que contesten todos «no sabe / no contesta». La conclusión (1) obliga a evitar o a explicar la palabra entorno cuando empleemos los fenómenos de retroalimentación. Ésta podrá ser sustitui-

da por otra suficientemente descriptiva, que permita conocer si los alumnos reconocen y emplean los fenómenos de retroalimentación.

2. La categoría C1 es la más frecuente en las respuestas dadas por los alumnos. Este hecho se acentúa sobre todo en las preguntas n.º 1 y n.º 2. La conclusión (2) lleva a adoptar un cambio en la redacción de las condiciones de la prueba, que implicará incluir la siguiente recomendación: «preferimos que, en las respuestas, uses tus propias frases para explicar si la solución tiene límite o no. La razón que justifica esta afirmación es que la categoría 1 (C1), en la que el alumno emplea la respuesta dada por el alumno ficticio como justificación de su respuesta, es la categoría con mayor frecuencia absoluta (13).

3. Teniendo en cuenta que los alumnos emplean las respuestas dadas por un alumno ficticio como justificación de que la sucesión presentada tiene límite, y teniendo en cuenta que el fenómeno de aproximación intuitiva verbal está presente en las respuestas del alumno ficticio, podremos conjeturar que se identifica la a.s.i verbal con la propia definición de límite de la sucesión. Sin embargo, esto solamente puede ser una conjetura ya que únicamente encontramos evidencias escritas de lo anterior, en un solo alumno.
4. Solamente hay un alumno que contesta correctamente a las tres preguntas (con la excepción del apartado b de la pregunta n.º 3), y además justifique sus respuestas de manera correcta.
Esta conclusión lleva a suponer que son pocos los alumnos que tienen un conocimiento exhaustivo y bien definido del concepto de límite de una sucesión.
5. En la primera cuestión hay una respuesta errónea, en la segunda cuestión hay una respuesta errónea y una respuesta «no sabe / no contesta» y en la tercera cuestión, apartado «a», hay dos respuestas erróneas y dos respuestas «no sabe / no contesta». Teniendo en cuenta estos datos y que cada cuestión correspondía a un sistema de representación distinto: gráfico, tabular y verbal, conjeturamos que, al usar el sistema de representación gráfico, se produce el mayor porcentaje de éxito.
6. Solamente hay un alumno que se plantea la necesidad de conocer más valores de la sucesión para asegurar con certeza cuál es su límite. Esta petición se enfrenta a las sugerencias de los expertos (véase 1.3); resolveremos la contradicción indicando, en las condiciones de la prueba, que quienes necesiten más valores de la lista podrán pedirselos al investiga-

dor, el cual dará la información. Queda por decidir si se dará para todos los participantes o solamente para el que solicite la información.

7. Los alumnos emplean las respuestas dadas por un alumno ficticio como justificación de sus respuestas. Esto ha imposibilitado conocer qué fenómenos emplean los alumnos en las justificaciones de las mismas. De esta manera ha sido imposible la consecución de los objetivos específicos planteados en el apartado del documento, denominado «objetivos».

Teniendo en cuenta las conclusiones anteriores, podemos afirmar:

- No comprobamos si se ha cumplido el objetivo general 1, ya que no sabemos si los alumnos emplean de manera espontánea los fenómenos de aproximación intuitiva, o si lo hacen por contaminación de la respuesta del alumno ficticio.
- No tenemos argumentos para afirmar que los alumnos manejen los fenómenos de retroalimentación en sucesiones, ya que no conocen el concepto de entorno, palabra que se empleaba en el enunciado de la cuestión como elemento de los fenómenos de retroalimentación.
- Tenemos razones para afirmar que se ha cumplido el objetivo general 3, ya que hemos observado un mayor porcentaje de éxito en la cuestión en la que se empleaba el sistema de representación gráfico, estableciéndose así diferencias entre este sistema y los sistemas de representación verbal y tabular.
- Tenemos razones para afirmar que se ha cumplido el objetivo general 4 ya que hemos detectado que al dar una posible respuesta a la cuestión presentada (respuesta de un alumno ficticio), ésta se emplea en las respuestas de los alumnos.

- Respecto a los objetivos específicos, no tenemos evidencia de su logro, ya que los alumnos han empleado en la mayoría de los casos, las respuestas del alumno ficticio.

3. Cuestionario definitivo

En este apartado presentamos el nuevo cuestionario que será administrado próximamente a los alumnos, y que tiene en cuenta para su elaboración, todos los resultados que se han obtenido de este estudio.

El nuevo cuestionario presenta las siguientes características:

1. Las instrucciones para la realización del mismo se presentan en el anexo I, y se suministran con el cuestionario.

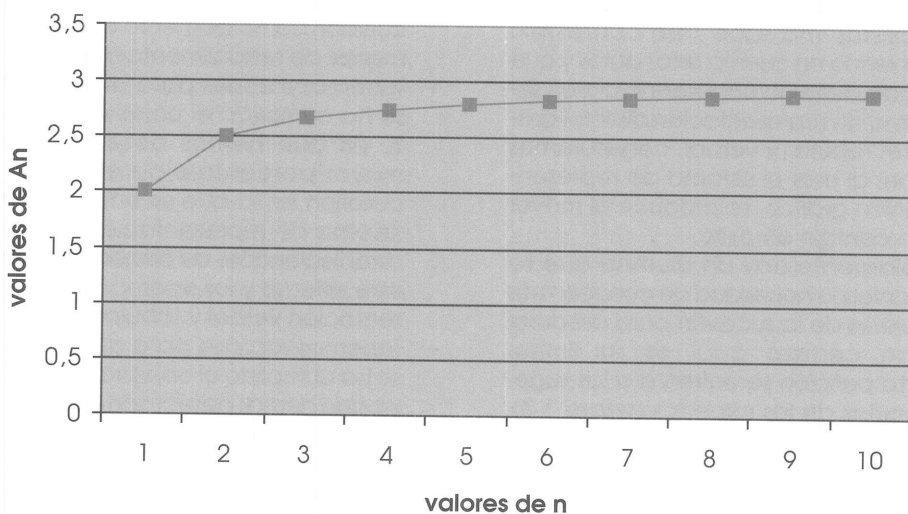
2. Consta de tres preguntas, la primera relativa a la aproximación simple intuitiva gráfica, la segunda relativa a la aproximación simple intuitiva tabular, y la tercera dividida en dos apartados, el primero relativo a la aproximación simple intuitiva verbal y el segundo relativo a la retroalimentación o *ívs* verbal.

3. Las nuevas preguntas tienen enunciados, distintos a los anteriores, pero mantienen toda la estructura anterior. La razón por la que cambiamos los enunciados es para no hacer el mismo cuestionario a los alumnos que ya participaron anteriormente en la realización de la prueba piloto.

El nuevo cuestionario queda presentado entonces de la siguiente manera (ver anexo):

Cuestión n.º 1

1. Se representa gráficamente una sucesión An . El profesor pregunta a la clase: ¿Tiene límite la sucesión? Un alumno responde: «El límite es 3 porque a medida que n crece los valores de la sucesión se van acercando cada vez más a 3». ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.



Cuestión n.º 2

2. Dada la siguiente sucesión:

n	1	2	10	1000	1000000	1000000000	
a_n	0,571428	0,7	1,24	1,496758	1,49999675	1,49999999	

El profesor pregunta a la clase: ¿Tiene límite la sucesión a_n ? Un alumno responde: «El límite es 1,5 porque a medida que avanza en la sucesión los valores de a_n se aproximan mas a 1,5» ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.

Cuestión n.º 3

3. La sucesión a_n cumple: su primer término vale 2,9, su segundo término vale 2,99, su tercer término vale 2,999, su cuarto término 2,9999, su quinto término 2,99999, su sexto término 2,999999, su séptimo término 2,9999999, su octavo término 2,99999999 y así sucesivamente

- Un alumno afirma: «Esta sucesión tiene límite 3, porque a medida que avanza n su valor va acercándose cada vez más a 3» ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.
- Otro alumno afirma: «La sucesión tiene límite 3, porque la distancia entre los términos de la sucesión y 3, puede hacerse tan pequeña como se desee, a partir de un término convenientemente elegido» ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.

4. Las pautas para la corrección del cuestionario quedan recogidas en las siguientes categorías:

Categoría C0: «Calcula correctamente el límite de la sucesión presentada y emplea la justificación dada por el alumno ficticio».

Categoría C1: «Calcula correctamente el límite de la sucesión presentada y emplea algún fenómeno en sus justificaciones».

C1.1 El alumno emplea el fenómeno así gráfico.

C1.2 El alumno emplea el fenómeno así tabular.

C1.3 El alumno emplea el fenómeno así verbal.

C1.4 El alumno emplea el fenómeno ivo verbal.

Categoría C2: «Calcula correctamente el límite de la sucesión presentada, pero no emplea ningún fenómeno en sus justificaciones». Esta categoría la podemos subdividir en dos:

C2.1 El alumno justifica su respuesta de alguna manera, sin emplear ningún fenómeno.

C2.2 El alumno no justifica su respuesta.

Categoría C3: «No calcula correctamente el límite».

C 3.1 En la respuesta aparece el infinito potencial.

C 3.2 En la respuesta no aparece el infinito potencial.

(Ej.: Si el alumno contesta que la sucesión $0,9, 0,99, 0,999...$ tiende a $0,99999$, y no tiende a 1 , ha calculado incorrectamente el límite, posee el infinito potencial pero no el infinito actual)

Categoría C4: «Plantea la necesidad de conocer más valores de la sucesión»

C4.1. Calcula correctamente el límite y justifica su respuesta.

C4.1.1 Cuando justifica su respuesta emplea la respuesta dada por el alumno ficticio

C4.1.2 Justifica su respuesta empleando algún fenómeno.

C4.1.3 Justifica su respuesta sin emplear ningún fenómeno y sin usar la respuesta del alumno ficticio.

C4.2 Calcula correctamente el límite pero no justifica su respuesta

Categoría C5: «No sabe /No contesta».

4. Perspectivas

En nuestro cuestionario definitivo, del cual esperamos sacar conclusiones para el desarrollo de nuestra tesis doctoral, pretendemos observar, la presencia de los fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación presentes en el límite de sucesiones, en las respuestas de los alumnos. Otros estudios también se han dedicado al estudio del concepto de límite, pero a diferencia del nuestro, toman como figura de estudio, el profesor (Espinoza y Azcárate, 2000).

La conjetura que hemos manejado en este documento y, en general, en nuestra investigación es que, si los citados fenómenos están presentes en los libros de textos y estos se utilizan como un ele-

mento casi indispensable en clase, deberían aparecer en las respuestas y justificaciones de los alumnos a cuestiones relacionadas con el límite de una sucesión.

La presencia de los mismos daría más consistencia a nuestra tesis doctoral, ya que nuestro desarrollo teórico, en el que definimos los fenómenos que organizan el límite, tendría dos campos de aplicación directos: los libros de texto¹ y el aula.

Por otro lado, no sólo pretendemos observar la presencia de los fenómenos *así e ívs*, sino además contabilizar con qué frecuencia se emplean, distinguiendo de esta manera los fenómenos que se usan en mayor o menor medida. Sobre este aspecto esperamos obtener, dentro de los fenómenos *así* que manejamos (verbal, gráfico, tabular), una mayor frecuencia en el empleo del fenómeno *así* gráfico. Esto se fundamenta en el hecho de que ha sido el fenómeno con mayor frecuencia en los libros analizados por nosotros (26 libros de textos de diferentes periodos y diferentes editoriales).

También manejamos la conjetura que el empleo de los fenómenos de retroalimentación será mínima en los libros de texto. Esta conjetura se fundamenta en el hecho de que el empleo de dicho fenómeno ha bajado mucho en los últimos tiempos en los libros de texto, coincidiendo con el desarrollo en el currículo oficial del concepto de límite desde un punto de vista más intuitivo.

¹ En un trabajo anterior, pendiente de publicar, realizado con 26 libros de texto, se ha observado la presencia de los fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación en el desarrollo del concepto de límite de una sucesión y de una función.

Referencias

CLAROS, F. J., SÁNCHEZ, M. T. Y CORIAT, M. (2006). Fenómenos que organizan el límite. En P. Bolea, M. González y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM*. Huesca: Universidad de Zaragoza.

ESPINOZA, L. Y AZCÁRATE, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto «límite de función»: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), 355-368.

PUIG, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

RICO, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.) *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM*. Huelva: Universidad de Huelva.

SIERRA, M., GONZÁLEZ, M. T. Y LÓPEZ, C. (1999). Evolución histórica de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 463-476.

Dirección de contacto:

María Teresa Sánchez Compañía, Francisco Javier Claros Mellado y Moisés Coriat Benarroch

Departamento de Didáctica de la Matemática

Facultad de Ciencias de la Educación

Universidad de Granada

Campus de Cartuja

18071 GRANADA

E-mail: teryser75@hotmail.com, jaclme@hotmail.com, mcoriat@ugr.es

Anexo: Instrucciones para la realización del cuestionario

1. El cuestionario tiene una duración de 30 minutos y se realiza por cada alumno de manera individual.
2. En cada pregunta se da una justificación de un alumno y se pide una aclaración. Como aclaración, por favor, no emplees las mismas palabras que ese alumno. Es decir, cuando contestes sobre el límite de la sucesión presentada, esperamos que justifiques dicha afirmación de manera razonada, y utilizando tus propias palabras.
3. Para justificar tus respuestas, puedes emplear el modo que consideres más conveniente.
4. Por favor, como esto no es un examen, contesta todas las cuestiones, sin dejar en blanco ninguna de ellas.
5. Si deseas conocer algún término de la sucesión que no aparece en la cuestión presentada, pregunta al profesor, el cual te lo suministrará.
6. El cuestionario solamente puede ser realizado por alumnos de 1.º y 2.º de bachillerato, de ciencias sociales, de ciencias de la naturaleza y de la salud y bachillerato tecnológico.
7. Los datos de clasificación: nombre, curso, centro, edad, etc, son recogidos para observar si existen diferencias importantes entre el tratamiento del concepto de límite en los diferentes cursos en los que se impar-

te. Asimismo recogemos la asignatura que los alumnos estudian para observar si también existe diferente tratamiento entre un bachillerato y otro.

8. Los datos personales, así como las respuestas obtenidas serán tratadas de manera confidencial. En nuestro estudio no citaremos el nombre de ningún alumno, manteniendo de esta manera su anonimato. Además, las respuestas individuales de los alumnos se utilizarán para describir las características del grupo. Gracias por la colaboración.

Cuestionario

Nombre: _____

Curso: _____

Centro: _____

Edad: _____ Sexo: _____

Repite curso: _____

Usáis libro de texto en clase: _____

¿Cuál?: _____

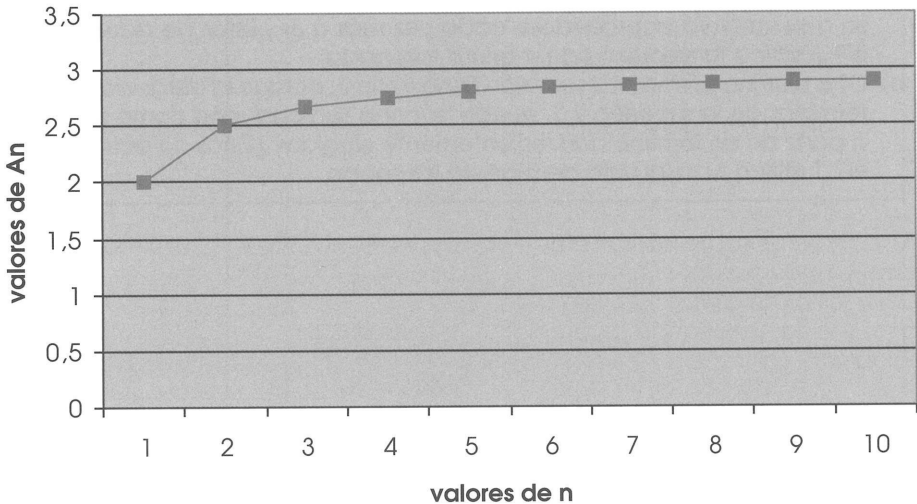
Nota de matemáticas en el último curso: _____

Rodea el nombre de la asignatura de matemáticas que cursas:

- Matemáticas I.
- Matemáticas II.
- Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I.
- Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II.

Cuestión n.º 1

1. Se representa gráficamente una sucesión A_n . El profesor pregunta a la clase: ¿Tiene límite la sucesión? Un alumno responde: «El límite es 3 porque a medida que n crece los valores de la sucesión se van acercando cada vez más a 3». ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.



Cuestión n.º 2

2. Dada la siguiente sucesión:

n	1	2	10	1000	1000000	1000000000	
a_n	0,571428	0,7	1,24	1,496758	1,49999675	1,49999999	

El profesor pregunta a la clase: ¿Tiene límite la sucesión a_n ? Un alumno responde: «El límite es 1,5 porque a medida que avanzo en la sucesión los valores de a_n se aproximan mas a 1,5» ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.

Cuestión n.º 3

3. La sucesión an cumple: su primer término vale 2.9, su segundo término vale 2.99, su tercer término vale 2.999, su cuarto término 2.9999, su quinto término 2.99999, su sexto término 2.999999, su séptimo término 2.9999999, su octavo término 2.99999999 y así sucesivamente
- a) Un alumno afirma: «Esta sucesión tiene límite 3, porque a medida que avanza n su valor va acercándose cada vez más a 3» ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.
- b) Otro alumno afirma: «La sucesión tiene límite 3, porque la distancia entre los términos de la sucesión y 3, puede hacerse tan pequeña como se desee, a partir de un término convenientemente elegido» ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.