

La noción de valor absoluto en la Enseñanza Secundaria Obligatoria y el Bachillerato

Miguel R. Wilhelmi, Universidad Pública de Navarra

Juan D. Godino, Universidad de Granada

Eduardo Lacasta Zabalza, Universidad Pública de Navarra

Resumen

La enseñanza y el aprendizaje de la noción de valor absoluto (NVA) son problemáticos, desde su introducción en los primeros años de la educación secundaria obligatoria hasta el uso como norma o métrica estándares en $\mathbb{R}$ en los cursos universitarios. Prueba de ello es la cantidad y heterogeneidad de investigaciones que se han publicado.

En este trabajo mostramos una breve discusión sobre las aportaciones más relevantes al tema. Asimismo, analizamos el papel que juega en los currículos y programas escolares la NVA, resaltando la definición aritmético-métrica dominante y cómo esta definición condiciona tanto el discurso como el tipo de problemas que pueden ser planteados de manera coherente. Observaremos como la equivalencia matemática de definiciones de la noción no implica una equivalencia en las dimensiones cognitiva, instruccional y didáctica. Por último, terminaremos con unas indicaciones de tipo curricular para la etapa preuniversitaria.

Palabras clave

Definición, enseñanza preuniversitaria, transposición didáctica, valor absoluto.

Abstract

The teaching and learning of the AVN are problematic, from their introduction in the first years of the Obligatory Secondary Education to the use like standards metric or norm in $\mathbb{R}$ in the university courses. This is proved by the amount and heterogeneity of the research papers that have been published.

In this paper we showed a brief discussion on the most excellent contributions to the subject. Also we analysed the function of the NVA in curricula and educational programs, standing out the dominant arithmetic-metric definition and how this definition conditions so much the discourse, as the kind of problems that can be created in a coherent way. We will observe too as the mathematical equivalence of definitions of the notion does not imply an equivalence cognitive, instructional and didactic. Finally, we will finish with some curricular indications for the pre-university stage.

Key words

Definition, pre-university education, didactical transposition, absolute value.

1. Estudios sobre la noción de valor absoluto

La enseñanza y el aprendizaje de la noción de valor absoluto (NVA) son problemáticos. Prueba de ello es la cantidad y heterogeneidad de investigaciones que se han desarrollado. La cuestión ha sido abordada desde una perspectiva *cognitiva* (¿qué dificultades encuentran los estudiantes en la resolución de problemas que involucran a la NVA en diferentes contextos (aritméticos, analíticos o geométricos?)), *instruccional* (¿qué conocimientos matemáticos y técnicos precisa un profesor para la introducción y desarrollo de dicha noción?), *instrumental* (¿qué papel pueden jugar las calculadoras, científicas, gráficas o programables, así como los *software* matemáticos?) o *didáctica* (¿qué problemas y situaciones permitirán el control y el funcionamiento de los sistemas didácticos?).

Gagatsis y Thomaidis (1994) muestran una sucinta antropología del saber «valor absoluto» distinguiendo cuatro fases en el proceso evolutivo de la noción según la función que desempeña dentro de la práctica matemática: 1) como instrumento para la resolución de problemas aritmético-algebraicos (Neper, Descartes, Newton, Euler); 2) como objeto justificativo-explicativo de la teoría algebraica y de la teoría de números (Lagrange, Gauss); 3) como instrumento formalizado para el análisis del álgebra de ecuaciones y del discurso analítico « ϵ - δ » (Argand, Cauchy); y, por último, 4) como instrumento de desarrollo del análisis complejo (Weierstrass). Asimismo, determinan los procesos adaptativos del saber en la institución escolar griega e interpretan los errores de los estudiantes en términos

de *obstáculos epistemológicos* (ligados al estudio histórico) y *didácticos* (relacionados con los procesos de transposición). Más recientemente, Gagatsis (2004, 61) razona apoyándose en datos empíricos que «los obstáculos encontrados en el desarrollo histórico del concepto de valor absoluto se evidencian asimismo en el desarrollo de las concepciones de los estudiantes».

Desde una perspectiva profesional, Arcidiacono (1983) justifica una instrucción de la NVA basada en el análisis gráfico en el plano cartesiano de funciones lineales a trozos y Horak (1994) establece que las calculadoras gráficas representan un instrumento más eficaz que el lápiz y papel para llevar a cabo esta enseñanza.

Chiarugi, Fracassina y Furinghetti (1990) realizan un estudio de la dimensión cognitiva de diferentes grupos de estudiantes enfrentados a la resolución de problemas que involucran a la NVA en diferentes contextos matemáticos (teoría de funciones, geometría), con ostensivos de distinta naturaleza (números concretos, parámetros) y con niveles de abstracción diferentes (manipulaciones concretas o simbólico-literales). El estudio determina la necesidad de investigaciones que permitan superar los errores y falsas concepciones (*misconceptions*).

Perrin-Glorian (1995) establece ciertas directrices para la institucionalización (por parte del profesor) del saber «NVA» en los contextos aritmético y algebraico; así argumenta la función central de las decisiones didácticas del profesor en la construcción de la NVA, que deben tener en cuenta las restricciones cognitivas de los estudiantes y deben resaltar el papel instrumental de la NVA.

Wilhelmi, Godino y Lacasta (2005, 2007) resaltan el hecho de que un objeto

matemático puede ser introducido por un conjunto de definiciones equivalentes y que, por lo tanto, una cuestión fundamental consiste en determinar la eficacia didáctica de las técnicas asociadas a estas definiciones para la resolución de una clase de problemas. Ejemplifican este hecho analizando la eficacia didáctica de técnicas asociadas a diferentes definiciones de la noción de valor absoluto (NVA). Para ello introducen distintas definiciones para esta noción, describen el *holo-significado* (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007) de la misma y analizan un cuestionario donde se puede observar cómo las técnicas de resolución de problemas asociadas a las definiciones condicionan el trabajo matemático de los alumnos.

Todos estos estudios, desde diversos puntos de vista (profesional o investigador) y desde diferentes perspectivas (epistemológica, cognitiva o didáctica) plantean la necesidad de responder a ciertas preguntas curriculares tales como:

¿Cuál es el estatus de la NVA en la enseñanza preuniversitaria actual?

¿Con los conocimientos didácticos (normativos o técnicos) es posible establecer procesos cognitivos e instruccionales para la introducción y desarrollo de la noción de valor absoluto en la enseñanza preuniversitaria que sean significativos?

Nuestro objetivo en este trabajo es dar una respuesta a estas cuestiones. Para ello, analizaremos en la sección 4, libros de texto de matemáticas, mostrando algunas implicaciones curriculares (sección 5). Antes, en la sección 2, introduciremos diversas definiciones de la noción de valor absoluto y discutiremos su influencia en la actividad matemática. En la sección 3 resaltaremos la com-

plejidad matemática de la noción y el hecho de que la equivalencia de definiciones de una noción matemática no implica la equivalencia *epistemológica* (diversidad de procedimientos de cálculo y justificación de los mismos), *cognitiva* (conocimientos necesarios para movilizar de manera eficaz la noción en situaciones problemáticas) o *instruccional* (recursos necesarios para su enseñanza). Terminaremos con unas reflexiones micro y macrodidácticas.

2. Definiciones de la noción de valor absoluto

El proceso de definición de objetos matemáticos «es el representante principal del conflicto entre la estructura de las matemáticas, tal y como la conciben los matemáticos profesionales, y el proceso cognitivo de adquisición de conceptos» (Vinner, 1991, 65). Este hecho justifica el gran número de investigaciones en didáctica de las matemáticas cuyo tema es la definición matemática (Linchevsky, Vinner y Karsenty, 1992; Mariotti y Fischbein, 1997; De Villiers, 1998; Winicki-Landman y Leikin, 2000; etc.)

En esta sección introducimos algunas definiciones de la NVA asociadas a diferentes contextos de uso. Las nociones han sido extraídas de diferentes libros de matemáticas. Estas definiciones nos darán una visión panorámica de la complejidad de la noción y la diversidad en que ésta es introducida. Esta panorámica nos servirá para tomar conciencia de las diversas *transposiciones* (Chevallard, 1985) posibles y como referencia para analizar la propuestas actuales (concretadas en los libros de texto).

2.1. Definiciones de la noción de valor absoluto

En el contexto aritmético, la NVA representa una regla que «deja los números positivos invariantes y pasa los números negativos a positivos» (Leithold, 1968, 10).

En ocasiones, el valor absoluto se introduce como una regla de asignación de valores positivos¹ a cualquier número real, mediante dos subreglas (se asimila el valor 0 a los valores positivos, a los negativos o a ambos):

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0 \text{ y } |a| = -a \text{ si } a \leq 0$$

Esta formulación es muy próxima al modo en que se introduce en muchos libros de texto como función a trozos. Pero, al resaltarse el aspecto de «regla de asignación de valores positivos a cualquier valor real», incide en la posibilidad de definir una métrica en $\mathbb{R}$.

«Intuitivamente, el valor absoluto de a representa la distancia entre 0 y a , pero de hecho la idea de 'distancia' se definirá en términos de 'valor absoluto', la cual es a su vez definida en términos de orden» (Ross, 1980, 16).

De esta forma, el valor absoluto dota al conjunto de los números reales de una métrica; la distancia de un número real

x al origen 0 queda definida por la relación: $d(x; 0) = |x|$. Sin embargo, en muchos textos, la visión intuitiva de valor absoluto como distancia es aceptada como definición: $|x| = d(x; 0)$.

«La distancia de un punto, A , al origen, considerada como positiva, se llama valor absoluto de A y es denotada mediante el símbolo $|A|$. Esto es, si $A \geq 0$, se tiene $|A| = A$; si $A \leq 0$, se tiene $|A| = -A$ » (Courant y Robbins, 1996, 57).

El considerar la distancia como «positiva» supone, implícitamente, la aceptación de que ésta puede ser considerada como «negativa» o, mejor, distinguir entre «magnitud» y «sentido» de esta magnitud (Mollin, 1998, 47). De hecho, en el contexto geométrico, el valor absoluto puede ser comprendido vectorialmente como el módulo de un vector unidimensional ($|x| = |\vec{x}|$). Más aún, este hecho puede ser generalizado como una propiedad que se deriva de la naturaleza «ordenada» y «completa» de $\mathbb{R}$ (Aliprantis y Burkinshaw, 1998, 66-67).

De esta forma, la representación gráfica del valor absoluto como distancia precede (y, en cierto sentido, se impone) a la NVA conceptualizada como función: ¿Qué sentido tiene, por ejemplo, la expresión $|\sin(x) + x^2|$? Por ello, en el contexto del análisis matemático es reformulada como función «a trozos» (Truss, 1997, 70-102), función «máximo» ($|x| = \max\{x, -x\}$) (Aliprantis y Burkinshaw, 1998, 16) o función «compuesta» ($|x| = +\sqrt{x^2}$) (Mollin, 1998, 47).

Estas definiciones analíticas tienen generalizaciones: la NVA como función «máximo» puede ser extendida a espacios vectoriales ordenados completos en términos de la noción más general de «supremo» (Schwartz, 1991, 87-90); la

¹ La definición clásica dada por Ross (1980) no establece *a priori* la proposición « $\forall a \in \mathbb{R}, |a| \geq 0$ », sino que ésta se deduce de manera «obvia» de la definición. «Es obvio, a partir de la definición, que $|a| \geq 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. (La voz "obvio" tal y como se usa aquí significa que el lector puede fácilmente observar porqué este resultado es verdadero. Efectivamente, si $a \geq 0$, entonces $|a| = a \geq 0$, mientras que $a < 0$ implica $|a| = -a \geq 0$. Usamos las expresiones "obviamente" o "claramente" donde es preciso realizar un conjunto de argumentos muy simples, pero no usamos estos términos en aspectos oscuros y sutiles)» (Ross, 1980, 17).

NVA como función «a trozos» puede ser extendida a todo cuerpo ordenado no vacío (Beardon, 1997, 13); por último, la NVA como función «compuesta» es utilizada para generalizar la noción de valor absoluto al conjunto de los números complejos e interpretar ésta en términos gráficos; o viceversa, la relación $|x| = +\sqrt{x^2}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) se acepta como una particularización de la definición de valor absoluto para los números complejos (números complejos con parte imaginaria nula) (Stillwell 1998, 217).

Las definiciones anteriores son matemáticamente equivalentes, pero su uso condiciona la actividad matemática. Wilhelmi, Godino y Lacasta (2005, 2007) muestran cómo las definiciones no son equivalentes desde el punto de vista de la actividad matemática, por cuanto no involucran los mismos objetos matemáticos en la resolución de un mismo problema. Ejemplifican este hecho mediante la resolución de la ecuación lineal con valor absoluto: $|x - 2| = 1$. En el siguiente punto describimos brevemente este aspecto. El análisis de las diferencias de los distintos modos de realización se realiza en la sección 3.3.

2.2. Influencia de las definiciones en la actividad matemática

2.2.1. Resolución aritmética

Para resolver la ecuación $|x - 2| = 1$ se razona: el valor absoluto de un número es 1, entonces este número es 1 o -1; ¿qué número, al restarle 2, da 1? ¿qué número, al restarle 2, da -1? La formalización de este método puede hacerse de la siguiente forma:

$$|x - 2| = 1 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

2.2.2. Resolución analítica, según la definición función a trozos

En general se tiene:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$|x - 2| = \begin{cases} (x - 2) & \text{si } x \geq 2 \\ -(x - 2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$|x - 2| = 1 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 & (x \geq 2) \rightarrow x = 3 \\ -(x - 2) = 1 & (x < 2) \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

2.2.3. Resolución analítica, según la definición función compuesta

$$\begin{aligned} |x - 2| = 1 &\rightarrow \sqrt{(x - 2)^2} = 1 \rightarrow (x - 2)^2 = 1 \\ &\rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow x &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

2.2.4. Resolución analítica, según la definición función máximo

Puesto que $|x - 2| = \max\{x - 2; -(x - 2)\}$, la demostración se reduce al determinar para qué valores $x - 2 = 1$ y $-(x - 2) = 1$. Los cálculos, por lo tanto, son similares a los realizados según la definición función a trozos.

2.2.5. Resolución métrica

Puesto que $|x - 2| = d(x; 2)$, x es un punto de la recta real tal que la distancia al entero 2 es 1. De esta manera, $x = 2 \pm 1$, esto es: $x = 3$ o $x = 1$.

2.2.6. Demostración geométrica, según la definición vectorial

A todo número real x se le asocia el vector con origen 0 y final x en el sistema de referencia Ox (recta real). De esta manera, x queda identificado con el vector unidimensional (x); entonces, $x - 2$ representa el vector de origen 2 y

extremo x . En estas condiciones, la ecuación $|x - 2| = 1$ supone afirmar que el vector $(x - 2)$ tiene módulo 1 y, por lo tanto, el extremo x debe ser 3 o 1, puesto que el origen es 2.

2.3. Breve análisis de las técnicas de cálculo de soluciones de $|x - 2| = 1$

La diferencia entre la resolución aritmética y analítica según la función a tro-

zos es similar a la que puede observarse entre la resolución de ecuaciones lineales en la introducción de las mismas, donde se busca por tanteo una solución que cumpla una determinada condición (figura 1), y la resolución técnica por transposición, donde se obtienen ecuaciones equivalentes hasta la obtención de una donde se puede deducir cuál es, si existe, la solución (figura 2).

• Método de tanteo

Una forma de resolver ecuaciones por tanteo es construyendo una tabla. Por ejemplo, si queremos resolver la ecuación $x + 22 = 60$, construiremos una tabla como la siguiente, daremos valores a x y poco a poco nos iremos acercando al valor de x que verifica la ecuación.

x	$x + 22$	Tiene que ser cierto que $x + 22 = 60$
10	$10 + 22 = 32$	El resultado obtenido es pequeño.
100	$100 + 22 = 122$	El resultado ahora es demasiado grande.
50	$50 + 22 = 72$	Aún es grande, pero se parece más a 60.
40	$40 + 22 = 62$	¡Casi! Falta muy poco.
39	$39 + 22 = 61$	¡Ya sé lo que debo hacer!
38	$38 + 22 = 60$	¡Exacto! Luego la solución es $x = 38$.

Figura 1. Resolución por tanteo de ecuaciones lineales (Becerra et al., 1996, 75).

7 Resolución de ecuaciones

Observa los pasos que se siguen para resolver una ecuación:

► Ejemplo: $3x + 5 = x - 1$

- a) $3x + 5 - x = -1$ (hemos transpuesto x)
- b) $3x - x = -1 - 5$ (transponiendo el 5)
- c) $2x = -6$ (reagrupando los términos)
- d) $x = -3$ (hallando la solución)

Podemos comprobar que -3 es la solución, cambiando la x por -3 en la ecuación y observando que a la izquierda y la derecha de la igualdad queda el mismo número.

Figura 2. Resolución por transposición de ecuaciones lineales (Casanovas y Figuera, 1997, 89).

A pesar de que la definición aritmética y la de función a trozos no son equivalentes, los sistemas de dos ecuaciones lineales que se construyen con sus técnicas asociadas sí lo son. Además, puesto que $\mathbb{R}$ no tiene divisores de cero (si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$), el sistema anterior es equivalente a la ecuación cuadrática que resulta de la aplicación de la definición función compuesta. A pesar de esta equivalencia, la resolución analítica, según la definición función compuesta, precisa de técnicas de resolución de ecuaciones de segundo grado y, por lo tanto, los objetos involucrados son diferentes a los que aparecen en las resoluciones aritmética y analítica según la función a trozos.

Las resoluciones métrica y geométrica parten de la interpretación gráfica. Así, por ejemplo, según la resolución métrica, se concluye que las soluciones de las ecuaciones del tipo $|x - k| = m$ ($k, m \in \mathbb{R}$) son $x = k \pm m$; de hecho, los valores x representan los extremos del intervalo cerrado centrado en k y de radio m . La resolución geométrica se basa en una justificación similar, sólo que los objetos representados no son intervalos sino vectores unidimensionales (con origen y extremo).

Los procedimientos de cálculo permiten resolver todas las ecuaciones lineales con valor absoluto de la forma $|x - k| = m$ ($k, m \in \mathbb{R}$). Esto no significa que sea equivalente según su eficacia, coste y recursos necesarios para su enseñanza y para su aprendizaje (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2005, 2007). Tampoco, se establece cuál es el campo de aplicabilidad de dichos procedimientos. Por ejemplo: ¿permiten resolver ecuaciones de la forma $|r \cdot x - k| = |s \cdot x - t|$ ($r, k, s, t \in \mathbb{R}$)? ¿Es necesario realizar adaptaciones sustanciales o simples adaptaciones para poder resolver estos proble-

mas? ¿De qué instrumentos de valoración disponemos para juzgar si estas adaptaciones de las técnicas son sustanciales o simples desde el punto de vista epistemológico, cognitivo o instruccional?

El breve estudio muestra una gran diversidad de definiciones, de contextos de uso y de significados asociados a la NVA, que a su vez implican una variedad de procedimientos de resolución. Esta variedad de objetos hacen la NVA «compleja». ¿Compleja en qué sentido?

3. Complejidad matemática vs. Complejidad de aprendizaje

Desde el punto de vista estrictamente *formal y oficial* (Brown, 1998), se acepta que la definición de un objeto matemático constituye su significado. La descripción del sistema de objetos y significados asociados a una noción se obtiene por el enunciado y demostración de un teorema de caracterización para dicha noción. En concreto, con relación al valor absoluto, el teorema consistiría en privilegiar una de las definiciones y justificar a continuación la equivalencia (matemática) de las mismas.

El matemático profesional identifica una misma estructura formal en la variedad de objetos matemáticos y en la actividad que con ellos se lleva a cabo; estructura que considera como «la noción matemática». Esta estructura formal representa la referencia implícita en la resolución de tipos de problemas asociados a los distintos contextos de uso. Sin embargo, en los procesos de enseñanza y aprendizaje, los sujetos carecen de la maestría suficiente para

identificar dicha estructura y, por lo tanto, se precisa valorar la «equivalencia» de definiciones.

Basándose en datos empíricos, Leikin y Winicki-Landman (2000) destacan diferentes estrategias utilizadas por los profesores para analizar definiciones equivalentes de una noción matemática. Estas estrategias se basan en: las *propiedades* (determinación de relaciones lógicas entre las propiedades que definen el concepto), los *conjuntos* (análisis del conjunto de elementos que quedan discriminados por la definición) o las *representaciones* (representación del objeto definido). La aplicación de estas estrategias no se restringe al plano epistemológico.

«Los profesores usualmente discuten tanto características pedagógicas como matemáticas de las definiciones, y muy frecuentemente usan consideraciones didácticas para establecer sus preferencias matemáticas» (Leikin y Winicki-Landman, 2000, 27).

De hecho, los datos empíricos aportados por Leikin y Winicki-Landman (2000) permiten afirmar que la equivalencia de definiciones matemáticas no puede valorarse únicamente desde el punto de vista epistemológico, es necesario tener en cuenta las dimensiones *cognitiva* (¿qué estrategias de acción genera cada una de las definiciones?), *instruccional* (¿qué definición es más adecuada dentro de un proyecto determinado de enseñanza?) y *didáctica* (¿qué relación se establece entre los significados personal aprendido e institucional pretendido?).

Por ello, la justificación de la equivalencia matemática de las definiciones de valor absoluto no representa un instrumento adecuado de estructuración de los modelos asociados a dicha noción

con vistas a su enseñanza y aprendizaje. El estudio de los modelos de valor absoluto (junto con sus definiciones asociadas) y de la aplicación para la resolución de ecuaciones lineales muestran, con relación al significado, la necesidad de un *tránsito flexible* entre los distintos modelos.

Tall (1991) define la *abstracción reflexiva* como un mecanismo por el cual el sujeto encapsula un proceso en un concepto. Es precisamente esta encapsulación la que capacita a los matemáticos profesionales para utilizar de manera flexible un símbolo que representa, al mismo tiempo, un proceso y un concepto. Esto es, la *abstracción reflexiva* está en la base de lo que se ha llamado el *pensamiento matemático flexible*, que permite transitar de forma no violenta entre los dos estados de un objeto matemático: *operacional dinámico* (cuando el objeto es utilizado como instrumento, esto es, entendido como proceso) y *estructural estático* (cuando el objeto se relaciona con otros objetos dentro de una teoría, esto es, entendido como concepto).

La definición introducida por Tall no es *operativa* (Williams, 1999): ¿cómo determinar si un individuo desarrolla una actividad matemática utilizando de manera flexible el carácter dual proceso-concepto de un objeto matemático? ¿Qué acciones, gestos, argumentos observables constituyen evidencia de que dicho individuo opera mediante un pensamiento matemático flexible en un proceso de estudio matemático? ¿Es el pensamiento matemático flexible una *metáfora* (Barrow, 1997) para determinar un comportamiento «óptimo» con relación a un problema o situación matemáticos?

«La naturaleza densa de la cognición representa un gran impedimento

para su estudio científico. A menos que los *constructos*² sean definidos en términos de fenómenos observables, no pueden ser realmente valorados y estudiados científicamente. Lo ideal para el estudio científico de los procesos cognitivos superiores sería desarrollar primero sólidas definiciones operativas y luego trabajar en la estandarización de estas definiciones.» (Williams, 1999, 413–414).

Bajo nuestra perspectiva, el *pensamiento matemático flexible* es la capacidad de tránsito rutinario entre diferentes procedimientos de resolución, que además supone un uso eficaz de dichos procedimientos, el conocimiento de justificaciones coherentes de los mismos y un discurso fundamentado de las relaciones entre la diversidad de objetos y significados involucrados. Asimismo, el pensamiento matemático flexible queda caracterizado por la capacidad de reconocimiento de las limitaciones de los procedimientos y por un control de la

actividad matemática, que se traduce en la responsabilidad (matemática, no de la culpabilidad) de los resultados producidos.

Las situaciones algorítmicas son el contexto privilegiado donde se puede afirmar que un sujeto moviliza en su actividad un pensamiento matemático flexible.

«Un sujeto está en una situación algorítmica si, para resolver un problema, está obligado a construir, a partir de un objeto A, un objeto B que resuelve dicho problema. Además, la construcción del objeto B no está debida al azar y el sujeto debe ser capaz de reproducir los gestos, técnicas, procedimientos que le permitieron obtener B a partir de A sin necesidad de tener que resolver un problema concreto. El hecho de que el sujeto sea capaz de construir el objeto B supone aceptar que es capaz de imaginar la función de dicho objeto; esto determina un verdadero conocimiento de la utilidad del objeto B.» (Wilhelmi, 2003c, 95).

² Variable teórica o latente no observable de manera directa.

6. Representa gráficamente la función $f(x) = |2x - 6|$.

Solución

Primero debemos determinar en qué intervalos la expresión $2x - 6$ es positiva y en qué otros es negativa. Para ello, resolvemos la ecuación:

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

El valor $x = 3$ divide al eje OX en dos partes:

$$\begin{array}{ccc} 2x - 6 < 0 & & 2x - 6 > 0 \\ x < 3 & 3 & x > 3 \end{array}$$

Podemos, por tanto, definir la función $f(x)$ en dos tramos:

$$f(x) = |2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & x \geq 3 \\ -2x + 6 & x < 3 \end{cases}$$

Dando valores correspondientes a cada uno de los tramos y llevándolos sobre un sistema de referencia:

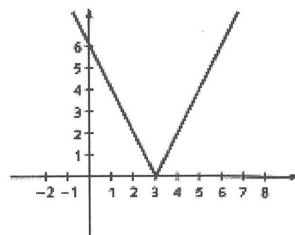


Figura 3. La NVA como función (Grupo Arrixcaca, 2000, 130).

Más adelante, en 1º y 2º de Bachillerato se introducen problemas donde es necesario interpretar el comportamiento puntual de funciones según continuidad o derivabilidad o representar y des-

cribir funciones (figuras 3 y 4). Siempre pensando en una formación técnica para la resolución de problemas «tipo» propuestos en diferentes convocatorias de exámenes de selectividad.

10. Determina las asíntotas horizontales y verticales de las funciones siguientes.	15. Estudia la continuidad de la función y represéntala.
$f(x) = \frac{2x}{ x + 2}$	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{ x - 2 } \text{ en } x = 2$
13. (Selectividad. Córdoba, 1994). Dada la función: $f(x) = \frac{ x - 2 }{ x - 1 } - 1$ represéntala gráficamente, estudiando su continuidad.	23. (Selectividad. La Rioja, 1996). Dada la función $f(x)$ definida por: $f(x) = \begin{cases} \frac{ x - 2 }{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ estudia su continuidad.

Figura 4. Necesidad institucional (Grupo Arrixcaca, 2001, 137).

4. Implicaciones curriculares

Las dificultades cognitivas (Chiarugi, Fracassina y Furinghetti, 1990) y la incapacidad de la institución escolar de confeccionar un currículo pertinente para la introducción y desarrollo de la NVA en la enseñanza secundaria (Perrin-Glorian, 1995; Gagatsis y Thomaidis, 1994) ha conducido a una enseñanza meramente técnica fundamentada en la definición aritmética como regla (que «quita el signo menos»). Esta introducción de la NVA constituye un obstáculo didáctico que restringe, en muchos casos, el conocimiento de los alumnos a un mero juego de símbolos.

Este obstáculo se manifiesta de distintas formas: $|a| = a$ y $|-a| = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$, haciendo caso omiso de si a es positivo ($a > 0$) o negativo ($a < 0$). O también: $|\sqrt{2} - 2| = \sqrt{2} + 2$, $|2 - \sqrt{2}| = 2 + \sqrt{2}$, $|\sqrt{-2}| = \sqrt{2}$, etc. Wilhelmi, Godino y Lacasta (2005) aportan pruebas expe-

rimientales de todo ello, a la vez que determinan una estructuración de la muestra de estudiantes según si movilizan o no la definición de valor absoluto en situaciones problemáticas.

Como afirman Winicki-Landman y Leikin (2000, 17), «una de las cuestiones más importantes en matemáticas es: '¿cuál es la mejor forma de introducir un nuevo concepto matemático para que sea aprendido?'. En la introducción de una noción matemática es necesario asegurar su representatividad con relación al significado institucional de referencia. La introducción del valor absoluto a través de la definición aritmética (y de su consecuente aplicación como regla) no es representativa: ninguna de las definiciones analíticas puede ser abordada (en la formación de los estudiantes está ausente la teoría de funciones) y las definiciones métrica y geométrica son comprendidas como una simple representación que justifica la regla «quitar el signo menos».

De esta forma, la introducción del valor absoluto en el contexto aritmético representa una decisión desafortunada en las instituciones escolares actuales: supone la implementación en el currículo de la noción «valor absoluto» por razones meramente culturales. Su inclusión es el «residuo» de una enseñanza donde la introducción de la NVA precedía a la resolución de ecuaciones lineales con valor absoluto y a la manipulación simbólica del límite secuencial y funcional.

La estructura curricular no está preparada actualmente para abordar con garantías el estudio de la noción en un contexto exclusivamente aritmético. Sería conveniente la expulsión «temporal» de la noción, bien hasta que se confeccionara una transposición didáctica pertinente, bien hasta que los estudiantes iniciaran el estudio de la teoría de funciones, central con relación a la noción (Arcidiacono, 1983; Horak, 1994).

«Se reconoce al buen maestro por el número de temas valiosos que se abstiene de enseñar». (Livingstone 1941, citado por Chevallard, 1985, 54).

Esta decisión supone la aceptación por parte de la institución escolar de:

1. La existencia de una transposición didáctica no pertinente con relación a la noción de valor absoluto.
2. La incapacidad para producir una *de-transposición* (Antibi y Brousseau, 2000) *viable* (costo de recursos materiales y temporales admisible), *reproducible* (estabilidad institucional con relación a la disponibilidad de recursos) y *fiable* (los conocimientos aprendidos son representativos de los saberes institucionales pretendidos).

Gagatsis (2004, 61) llega a una conclusión similar: «hay también un gran número de obstáculos de origen didáctico

relativos a una extraña transposición didáctica y a restricciones del sistema educativo (...) Es un problema de legitimación del contenido a enseñar.»

Por nuestra parte hemos comprobado (Wilhelmi 2003a, 2003b, 2004) que la introducción tardía del valor absoluto como función facilita no sólo la adquisición de dicha noción, sino la posibilidad de realizar tareas complejas, tales como la resolución de ecuaciones e inecuaciones algebraicas y trascendentes con valor absoluto, y el desarrollo formal de la noción de límite funcional y secuencial (en este orden). Asimismo, se evitan las intervenciones didácticas desafortunadas señaladas (vinculadas principalmente a la regla «quitar el signo menos»).

La introducción funcional del valor absoluto permite asimismo la relación entre sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas y la modelización de fenómenos físicos tales como la trayectoria de un haz de luz reflejado en un espejo o el tiro parabólico de una pelota que rebota al llegar al suelo.

Por último, el planteamiento hecho es exclusivo de la NVA y, por lo tanto, no extensible a otras nociones. El hecho de que una noción vaya a ser objeto de desarrollos posteriores no implica que deba retrasarse necesariamente su enseñanza. Por ejemplo, la noción de multiplicación sufre cambios radicales según el universo de objetos al que haga referencia (números, vectores, matrices, funciones, etc.), pero las definiciones particulares siguen siendo *eficaces* y *útiles* en campos restringidos: por muchas matemáticas que sepamos, seguiremos multiplicando números como una «forma abreviada de sumar».

De hecho, la extensión de las reflexiones hechas a no importa qué noción

matemática desatiende la naturaleza del desarrollo cognitivo (se aprende *contra* los conocimientos adquiridos — Bachellard, 1934) y lleva al inmovilismo, puesto que es obvio que no es posible introducir en los procesos de enseñanza y aprendizaje las nociones, procesos y significados de los objetos matemáticos tal y como un experto en un área de conocimiento los concibe. Esta «obvie- dad» explica el fracaso de las *matemáticas modernas* que identificaron el desarrollo cognitivo de los niños con la construcción de las matemáticas según la Teoría de Conjuntos.

A modo de conclusión

La introducción de la NVA es «mostrati- va», de la misma manera que lo es la visita a un museo para ver un cuadro: «aquí tenéis el valor absoluto; admira- dlo, porque no haremos nada con él». Posteriormente, se reformula en térmi- nos funcionales por una necesidad impuesta implícitamente por la institu- ción universitaria. Se aprende un con- junto de técnicas de manera similar al aprendizaje de una colección de hitos históricos que permiten configurar el per-

fil de un personaje, la idiosincrasia de un pueblo o el desarrollo de una cultura.

El valor absoluto ha ido desaparecien- do poco a poco de currículos y pro- gramaciones y sólo queda un vestigio de propuestas que perdieron su vigen- cia (como todas lo hacen por la propia dinámica de la relación escolar y la *obsolescencia* de las situaciones didácticas). La evolución curricular es lenta. Las innovaciones buscan, cícli- camente, una mejora de la enseñan- za, pero no tocan nada esencial de las prácticas de los profesores (Brousseau, 1998, 354). Esto hace que las reformas educativas incidan en aspectos peda- gógicos y psicológicos, antes que dis- ciplinares.

Una ingeniería didáctica que se centre en la NVA como función, y por lo tanto en un contexto analítico, determinará un cambio del estatus de la noción y romperá con el aprendizaje mecánico y sin sentido de las propuestas actuales, que se concretan en una mera mostra- ción «pictórica» de la noción (en el pri- mer ciclo de la ESO) y en un uso ritual en tareas estereotipadas (en el bache- llrato).

Direcciones de contacto:

Miguel R. Wilhelmi
Departamento de Matemáticas - Universidad Pública de Navarra
Campus de Arrosadía s/n - 31006 Pamplona (Navarra)
E-mail: miguelr.wilhelmi@unavarra.es

Juan D. Godino
Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática - Universidad de Granada
Campus de Cartuja - 18071 Granada (Granada)
E-mail: jgodino@ugr.es

Eduardo Lacasta Zabalza
Departamento de Matemáticas - Universidad Pública de Navarra
Campus de Arrosadía s/n - 31006 Pamplona (Navarra)
E-mail: elacasta@unavarra.es

Referencias

- ALIPRANTIS, C. D. Y BURKINSHAW O. (1998). *Principles of Real Analysis*, 3rd ed. San Diego: AP.
- ANTIBI, A. Y BROUSSEAU, G. (2000). La dé-transposition de connaissances scolaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(1), 7-40.
- ARCIDIACONO, M. J. (1983). A visual approach to absolute value. *The Mathematics Teacher*, 76(3), 197-201.
- BACHELARD, G. (1934). *La formación del espíritu científico*. México DF: Siglo XXI, 1988.
- BARROW, R. (1997). Language: definition and metaphor. *Studies in Philosophy and Education*, 16, 113-124.
- BEARDON, A. F. (1997). Limits. A new approach to Real Analysis. New York: Springer-Verlag.
- BECERRA, M. V., MARTÍNEZ, R., PANCORBO, L. Y RODRÍGUEZ, R. (1996). *Matemáticas 2.º ESO*. Madrid: McGraw-Hill.
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- BROWN, J. R. (1998). What is a definition? *Foundations of Science*, 1, 111-132.
- CASANOVAS, P. Y FIGUERA, J. M. (1996). *Matemáticas 1.º ESO*. Barcelona: Almadaba.
- CASANOVAS, P. Y FIGUERA, J. M. (1997). *Matemáticas 2.º ESO*. Barcelona: Almadaba.
- CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- CHIARUGI, I., FRACASSINA, G. Y FURINGHETTI, F. (1990, July). Learning difficulties behind the notion of absolute value. *Proceedings of PME 14 (México)*, Vol. 3, 231-238.
- COLERA, J., GAZTELU, I., DE GUZMÁN, M. Y GARCÍA, J. E. (1996). *Matemáticas 1*. Madrid: Anaya.
- COURANT, R. Y ROBBINS, H. (1996). *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*, 2nd edition. New York: Oxford University press.
- DE VILLIERS, M. (1998, July). To teach definitions in geometry or teach to define? *Proceedings of PME 22 (Stellenbosch, South Africa)*, Vol. 2, 248-255.

FRÍAS, V., SALVADOR, A. Y ZUASTI, N. (2004). *Esfera. Matemáticas 1.º ESO*. Barcelona: Casals.

GAGATSI, A. (2004). A multidimensional approach to understanding and learning mathematics. In A. Gagatsis and T. Papastavridis (eds), *Proceedings of the 3rd International Mediterranean Conference on Mathematics Education*, 53-72. Athènes: Hellas.

GAGATSI, A. Y THOMAIDIS, I. (1994). Un étude multidimensionnelle du concept de valeur absolue. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et Tavnnot (eds.), *Vingt ans de didactique de mathématiques en France* (pp. 343-348). Grenoble: La Pensée Sauvage.

GRUPO ARRIXACA (2000). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, 1.º Bachillerato*. Madrid: Santillana.

GRUPO ARRIXACA (2001). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, 2.º Bachillerato*. Madrid: Santillana.

LEITHOLD, L. (1968). *The calculus with analytic geometry*. New York: Harper & Row.

HORAK, V. M. (1994). Investigating absolute-value equations with the graphing calculator. *The Mathematics Teacher*, 87(1), 9-11.

LEIKIN, R. Y WINICKI-LANDMAN, G. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: part 2. *For the Learning of Mathematics*, 20(2), 24-29.

LINCHEVSKY, L., VINNER, S. Y KARSENTY, R. (1992 July). To be or not to be minimal? Student teachers' views about definitions in geometry. *Proceedings of PME 16* (Durham, NH), Vol. 2, 48-55.

MARIOTTI, M. A. Y FISCHBEIN, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219-248.

MOLLIN, R. A. (1998). *Fundamental number theory with applications*. Boca Raton, Florida: CRC Press.

PERRIN-GLORIAN, M-J. (1995 July). The absolute value in secondary school. A case study of «Institutionalisation» process. *Proceedings of PME 19* (Recife, Brazil), Vol. 2, 74-81.

ROMÁ, R., SANCHIS, S. Y ZARAGOZA, A. P. (2004). *Refuerzo de matemáticas 2*. Madrid: Almadraba.

ROSS, K. A. (1980). *Elementary analysis: the theory of calculus*. New York: Springer-Verlag, 2000.

- SCHWARTZ, L. (1991). *Analyse I. Théorie des ensembles et topologie*. Paris: Hermann.
- STILLWELL, J. (1998). *Numbers and geometry*. New York: Springer-Verlag.
- TALL, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht, HOL: Kluwer.
- TRUSS, J. K. (1997). *Foundations of mathematical analysis*. Oxford: Oxford University Press.
- VINNER, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking* (65-81). Dordrecht: Kluwer.
- WILHELMI, M. R. (2003a). *Cálculo I*. Piura, PER: Universidad de Piura.
- WILHELMI, M. R. (2003b). *Cálculo II*. Piura, PER: Universidad de Piura.
- WILHELMI, M. R. (2003c). *Análisis epistemológico y didáctico de nociones, procesos y significados de objetos analíticos*. Sección 2: Tesis doctorales, n° 23. Pamplona, ESP: Universidad Pública de Navarra.
- WILHELMI, M. R. (2004). *Introducción al cálculo*. Piura, PER: Universidad de Piura.
- WILHELMI, M. R., GODINO, J. D. Y LACASTA, E. (2005). Eficacia didáctica de definiciones equivalentes de una noción matemática. El caso del valor absoluto. En A. Contreras, L. Ordóñez y C. Batanero (Eds.), *Investigaciones en didáctica de la matemática. Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones semióticas* (pp. 239-254). Jaén: Universidad de Jaén.
- WILHELMI, M. R., GODINO, J. D. Y LACASTA, E. (2007). Configuraciones asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 27(1), 77-120.
- WILHELMI, M. R., GODINO, J. D. Y LACASTA, E. (2007). Didactic Effectiveness of Mathematical Definitions: The Case of the Absolute Value. *International Electronic Journal of Mathematics Education (IEJME)*, 2(2) June 2007, <http://www.iejme.com>.
- WILLIAMS, R. L. (1999). Operational definitions and assessment of higher-order cognitive constructs. *Educational Psychology Review*, 11(4), 411-427.
- WINICKI-LANDMAN, G. Y LEIKIN, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: part 1. *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 17-21.