

Matemáticas escolares y análisis de contenido con profesores de secundaria en formación

*Luis Rico Romero, Jose Luis Lupiáñez Gómez, Antonio Marín Marín
y Pedro Gómez Guzmán.
Universidad de Granada*

Resumen

Presentamos el análisis de contenido como un procedimiento centrado en describir, analizar y organizar los diferentes significados que admiten las matemáticas escolares, cuando se planifican unidades didácticas. Ejemplificamos el procedimiento y sus fases mediante el tema Sistema de los Números Naturales.

Palabras clave

Formación de profesores de matemáticas, Competencias y capacidades sobre planificación, Análisis didáctico, Análisis de contenido, Números naturales.

Abstract

We introduce content analysis as a procedure for describing, analyzing and organizing the different school mathematics meanings that should be taken into account to plan didactical units. We use the system of whole numbers for exemplifying the phases of this procedure.

Key words

Mathematics teachers training, Competences and capacities about planning,

Didactical analysis, Subject matter analysis, Natural numbers.

Introducción

La planificación, competencia profesional clave para el profesor, está poco desarrollada en los planes de formación inicial del profesorado. Dadas las dificultades inherentes al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas se trata de una competencia importante para el profesorado de esta materia.

La información que aportan los currículos de Educación Secundaria establecidos y las secuenciaciones de contenidos que los boletines oficiales publican, son insuficientes para decidir acerca de qué debe aprender un alumno de secundaria en cada tema y cómo hacerlo operativo a nivel del aula cada día. Los libros de texto que publican las editoriales y su complemento en forma de libro del profesor ocupan un espacio intermedio entre la secuencia general del Boletín Oficial del Estado y la planificación diaria de actividades que el profesor debe realizar, ya que responden a preguntas como ¿qué contenidos trabajo con mis alumnos? ¿Qué expectativas tengo respecto a su aprendizaje? ¿Cómo selecciono y estructuro

las clases para que el alumno alcance las expectativas previstas? Sin embargo, la información que contienen los libros de texto, sus estrategias didácticas, la selección de tareas y los recursos que consideran, obligan a utilizar el libro de texto como apoyo al trabajo en el aula y no como guía de actuación.

La normativa educativa señala la obligatoriedad de elaborar documentos curriculares para cada centro, que contengan instrumentos para tomar decisiones para ajustar el contenido oficial del currículo a la realidad del alumnado; enfatiza la necesidad de atender a la diversidad del alumnado, a sus expectativas y conocimientos. La planificación, como competencia del profesor de matemáticas, demanda el desarrollo de capacidades específicas para identificar, organizar, seleccionar y priorizar los significados de los conceptos matemáticos mediante el análisis de su contenido.

Matemáticas Escolares

Entendemos por matemáticas escolares las matemáticas consideradas como objeto de enseñanza y aprendizaje. Postulamos que ideas, estructuras y conceptos matemáticos se han generado y constituido como herramientas para organizar los fenómenos de los mundos natural, mental y social. Los términos y conceptos matemáticos que transmite el sistema educativo para la formación de todos los ciudadanos corresponden a nociones socialmente útiles y culturalmente relevantes.

Las matemáticas son un modelo paradigmático de proporcionar significado a relaciones y expresiones abstractas que satisfacen un marco de experiencias estructuradas, relacionadas con las acciones de clasificar, contar, ordenar,

situar, representar, medir, expresar armonía, buscar relaciones y regularidades, jugar y explicar (Devlin, 1994; Steen, 1990).

Nuestro interés por el significado de los conceptos matemáticos está en el ámbito de la matemática escolar, en su consideración funcional. En el ámbito escolar, un mismo concepto matemático puede expresar una variedad de significados. Basándonos en las ideas de sentido y referencia (Frege, 1996), establecemos que los diferentes significados de un concepto matemático vienen dados por las estructuras conceptuales en que se inserta —referencia—, por los sistemas de símbolos que lo representan —signos—, y por los objetos y fenómenos de los que surge —sentido—. En la reflexión sobre matemática escolar, que corresponde al estudio curricular, el *significado* de un concepto lo adecuamos a la terna Estructura Conceptual-Representaciones-Fenómenos, con la cual caracterizamos el *significado* de un concepto de las matemáticas escolares.

Hay diferentes significados para un mismo concepto matemático, que vienen dados por las estructuras conceptuales que lo refieren, por los sistemas de símbolos que lo representan, y por los objetos y fenómenos de los que surge y que le dan sentido. Sostenemos que esto es así porque un mismo concepto admite una pluralidad de relaciones internas, de modos de representación y de sentidos, que vienen determinados por las relaciones externas del concepto de referencia (Rico, 1997).

Análisis de Contenido

El *análisis de contenido*, tal y como aquí se presenta, es una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad

de significados de los contenidos de las Matemáticas Escolares. Mediante este análisis se desarrollan capacidades del profesor de Matemáticas para establecer diversos significados de los temas matemáticos escolares, capacidades profesionales vinculadas a la competencia de planificación.

El conocimiento del profesor en formación se constituye en conocimiento experto conforme domina la pluralidad de significados de los contenidos de las matemáticas escolares, por medio del análisis de contenido. Esto se realiza mediante el estudio de las estructuras conceptuales en la que nuevos conceptos se insertan, por la determinación de los sistemas de representación mediante los cuales tales conceptos se expresan y por la delimitación y conocimiento de las cuestiones para cuya respuesta tales conceptos fueron contruidos, acotados, a su vez, por los campos en que tales conceptos se utilizan como herramientas para plantear y resolver problemas.

En este trabajo se muestra una aplicación de las nociones del análisis de contenido mediante su ejemplificación con un tema de Primer Ciclo de Educación Secundaria Obligatoria. El tema elegido como ejemplo es Sistema de los Números Naturales.

Tratamiento Curricular

Fijado el nivel en que va a realizarse el análisis de contenido de un tópico, en este caso el Primer Ciclo de Secundaria, es obligado acercarse a la normativa curricular y analizar las referencias al tema contenidas en los diferentes niveles. La referencia básica para el Sistema de los Números Naturales, que se ejemplifica, es:

«Primer curso. Contenidos:

- 1.º *Aritmética y Álgebra. Números naturales. El sistema de numeración decimal. Divisibilidad. Fracciones y decimales. Operaciones elementales. Redondeos. Potencias de exponente natural. Raíces cuadradas exactas. Las magnitudes y su medida. El sistema métrico decimal. El euro. Magnitudes directamente proporcionales. Porcentajes.*
- 2.º *Relación de divisibilidad. M. C. D. y m. c. m. de dos números naturales. Estimaciones, aproximaciones y redondeos. Estimaciones, aproximaciones y redondeos. Precisión y estimación en medidas»* (MEC, 2000; p. 61).

A partir de esta información se abre la posibilidad de:

1. Destacar conexiones con otros temas y núcleos temáticos del currículo.
2. Establecer una secuenciación de los aspectos del tema que se podrán desarrollar en varios cursos o a lo largo de otros tópicos.
3. Delimitar el contenido en un curso en el marco de una programación global.

Pero la información de los documentos curriculares es amplia y genérica, lo suficiente como para admitir una diversidad de interpretaciones. De hecho, los distintos libros de texto y otros desarrollos muestran diferentes aproximaciones que, por razones diversas, se suelen aceptar como modelos de propuestas curriculares. Conviene, pues, destacar algunos instrumentos y técnicas de trabajo para organizar y seleccionar contenidos, focalizar prioridades y configurar itinerarios de aprendizaje (Gómez, 2007).

El desarrollo del currículo de Matemáticas lo debe establecer, en definitiva, el seminario de profesores de cada centro. Los profesores han de establecer significados alternativos para los conceptos

y estructuras matemáticas, optimizar propuestas de enseñanza y determinar el material para sus alumnos en un momento concreto.

Términos: cero, uno, dos, tres...; igual, mayor/menor que; suma, resta, producto, división; siguiente a, anterior de; decena, centena, unidad de millar, millón, decena de millón,...; billón,...

Notaciones: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9; =, <, ≤, +, -, x, 10, 100, 1000,...; 10^2 , 10^3 ,...

Convenios:

- Los naturales comienzan en 0.
- Periodicidad de los órdenes del sistema: ((u, d, c), (um, dm, cm)), ((uM, dM, cM)),...
- Valor posicional de las cifras en un número.
- Lectura: *todo número se lee comenzando por la cifra de mayor orden, con indicación de dicho orden, continúa por...*
- Colocación de sumandos; de los factores de un producto; de los términos en una resta; de los términos en una división.

Resultados:

- Cada 10 unidades de un orden forman una unidad de orden superior.
- Comparación de naturales por *tamaño* y, en caso de igualdad, por su cifra de mayor orden.
- Todo número n tiene siguiente $n+1$ y, excepto 0, anterior $n-1$.
- Tablas de sumar y de multiplicar.
- Regularidades numéricas.

Conceptos Numéricos:

- Significados del número.
- Diversos conceptos de número natural.
- Secuencia numérica.
- Recta numérica.
- Sistema decimal de numeración.
- Orden entre naturales.
- Suma, resta producto y división de naturales.
- Divisibilidad.
- Propiedades de las operaciones numéricas.

Estructuras:

- $(\mathbb{N}, +)$ y $(\mathbb{N}, \times)$ Semigrupos conmutativos.
- $(\mathbb{N}, \leq)$ Orden total y arquimediano.
- $(\mathbb{N}, +, \times, \leq)$ Semianillo arquimediano.

Destrezas:

- Escritura y lectura de números.
- Descomposición polinómica de un número.
- Uso del paréntesis y jerarquía de las operaciones.
- Algoritmos de la suma y de la resta.
- Algoritmos del producto y de la división.
- Expresiones de un mismo número como resultado de distintas operaciones.
- Diversidad de representaciones de un mismo número.
- Orden de magnitud de un número o cantidad.
- Usos básicos de la calculadora con naturales.

Razonamiento:

- Deductivo: propiedades de las operaciones.
- Inductivo: regularidades numéricas.
- Recta numérica. Propiedades y operaciones en la recta.
- Figurativo: estructuras que se expresan gráficamente.
- Argumentos para justificar propiedades numéricas.

Estrategias:

- Cálculo mental.
- Estimación de los resultados de una operación.
- Reconocimiento de patrones numéricos.
- Reconocimiento de la estructura que comparten dos o más números.
- Construcción de un conjunto de números con ajuste a una regla.
- Estrategias de cálculo con la calculadora manual.
- Resolución de problemas aritméticos y numéricos.

Tabla 1. Clasificación cognitiva del contenido del Sistema de los Números Naturales.

Tipos de Contenido

El análisis de los significados de ideas y conceptos de las Matemáticas escolares obliga a revisar los contenidos y las estructuras en las que tales conceptos se insertan. Por ello el análisis didáctico comienza por el análisis de contenido, es decir, hacer una revisión de las estructuras matemáticas desde la consideración de su aprendizaje y enseñanza, y de ahí la importancia de revisar los contenidos desde una perspectiva cognitiva.

Algunos investigadores en educación matemática han organizado el conocimiento matemático escolar con criterios cognitivos, para ello usan la clasificación del contenido de las Matemáticas escolares en dos grandes bloques: *conceptual* y *procedimental* (Bell, Costello & Küchemann, 1983; Hiebert y Lefevre, 1986; Rico, 1995). Dentro de estos dos bloques establecen tres niveles de complejidad: *hechos* (que a su vez se organizan en *términos*, *notaciones*, *convencios* y *resultados*), *conceptos* y *estructuras* como los tres tipos de conocimientos que articulan el campo conceptual, y *destrezas*, *razonamientos* y *estrategias*, los correspondientes al campo procedimental.

Un profesor en formación debe discriminar los contenidos matemáticos como objetos de aprendizaje, para lo cual es útil esta clasificación. También debe tener capacidad para establecer una clasificación detallada de los contenidos que intervienen en un tema concreto, su tipología y nivel de complejidad. La Tabla 1 aplica esta clasificación para el Sistema de los Números Naturales.

Focos Conceptuales

Para avanzar y profundizar en el proceso de análisis del contenido de un tema

conviene que el profesor determine relaciones y prioridades entre conceptos y procedimientos, muestre la articulación e interdependencia entre ellos, y exprese su complementariedad. Para ello deberá destacar ciertas ideas centrales a partir de las cuales organizar la enseñanza del tema. Por tanto, se requiere capacidad del estudiante para profesor para fijar los conceptos que articulan el tema y mostrar un sistema de relaciones entre los distintos tipos de contenidos, a partir de dichos focos conceptuales.

Con estas premisas se habla de *focos conceptuales prioritarios* cuando se propone la organización de los contenidos de un tema a partir de un número reducido de ideas prioritarias. Los focos conceptuales consisten en agrupaciones específicas de conceptos, estrategias y estructuras, que adquieren importancia especial ya que expresan, organizan y resumen agrupamientos coherentes de los contenidos.

En el caso del Sistema de los Números Naturales, los focos que consideramos prioritarios para centrar el aprendizaje y abordar la enseñanza del tema, son: *nociones sobre significados* y *usos de los naturales*, *sistema decimal de numeración*, *relación de orden*, *suma de naturales*, *producto de naturales*, y *divisibilidad* y *Teorema Fundamental de la Aritmética*.

Cada uno de estos focos incluye una diversidad de hechos, conceptos y procedimientos, propone su agrupamiento, y organiza los contenidos de modo coherente. Los distintos focos muestran una clasificación que destaca las ideas principales del tema. Si combinamos esta elección de focos con la clasificación cognitiva podemos elaborar varios listados que expresan prioridades en la organización de los contenidos del tema

Significados y usos	Sistema Decimal de Numeración	Suma de naturales	Orden entre naturales	Producto de naturales
• Secuencia/ Contar • Ordinal/ Ordenar • Cardinal/ Cuantificar • Signo/ Codificar • Símbolos/ Estructurar • Números/ Operar • Recta/ Visualizar • Nociones y conceptos de número natural • Números pequeños, medianos y grandes¹	• Símbolos. Cero • Base: principio de agrupamiento • Unidades de orden superior • Escritura y lectura de números • Notación polinómica • Tablas numéricas • Algoritmos de suma y resta • Algoritmos de producto y división	• Símbolos de suma y resta • Noción de suma y resta • Composiciones aditivas de un número • Tabla de sumar • Algoritmos de suma y resta • Suma con la calculadora • Propiedades de la suma • Estructura (N; +) • Estimación de sumas y restas	• Siguiendo y anterior • Secuencia numérica • Comparar naturales cualesquiera • Relación de orden • Estructura ordinal de N • Orden de magnitud de un número • Orden de aproximación en una estimación	• Simbolización del producto • Términos del producto y división • Notaciones • Tabla de multiplicar • Algoritmos • Productos y divisiones con la calculadora • Divisibilidad • Factorización • Estructura (N; x) • Estimación de productos y divisiones

¹ Dependiendo de la complejidad del patrón del cual proceden, se distinguen los números *pequeños* (números de uno o dos dígitos, números de la vida cotidiana); *medianos* (números que se expresan mediante la totalidad de sus cifras, hasta un orden de magnitud del billón, números usuales de las magnitudes cotidianas) y *grandes* (números que se expresan mediante notación científica, de un orden de magnitud elevado y que corresponden a magnitudes de disciplinas científicas) (Rucker, 1988; pp. 72-73).

Tabla 2. Focos conceptuales prioritarios del Sistema de los Números Naturales.

Sistema de los Números Naturales. En la Tabla 2 hacemos este cruce usando los primeros cinco focos conceptuales prioritarios.

La elección de conceptos prioritarios ha permitido transitar desde un listado a varios listados paralelos, pero no han destacado las conexiones entre diferentes focos, ni tampoco al interior de los focos conceptuales.

Mapa relacional de conceptos y procedimientos

La organización alrededor de conceptos básicos admite una primera repre-

sentación en modo de mapa conceptual, específico a cada uno de los focos. Con esta representación se establecen nexos entre el conocimiento conceptual y procedimental de un mismo núcleo de conceptos básicos. Entre las ventajas de los mapas conceptuales destacan:

- Establecer una jerarquía de nociones dentro de cada concepto, que se expresa por su ordenación dentro de una lista mediante una representación lineal secuenciada.
- Conectar las nociones de las distintas listas; las relaciones y conexiones se muestran mediante segmentos o posiciones conectadas que, a veces, se identifican mediante etiquetas.

- Mostrar un grafo con nodos y conexiones como producto final; los nodos con mayor número de conexiones son los conceptos principales.
- Considerar distintos recorridos en el grafo; cada recorrido muestra un modo coherente de secuenciar varias nociones centrales en una estructura conceptual.
- El mapa conceptual es, fundamentalmente, un esquema para entender e interpretar una estructura conceptual determinada.

En la Figura 1 vemos la expresión de los conceptos y procedimientos básicos, que corresponden al foco «significados del número» del tema Sistema de los

Números Naturales, que muestra los conceptos principales de ese foco y algunas nociones básicas asociadas a ellos.

Por cada uno de los focos prioritarios puede y debe establecerse un sistema de relaciones con el que se articulen las nociones del foco; en cada caso dará lugar a un mapa conceptual. Con este ejercicio se desarrollan las capacidades de síntesis y estructuración, y su logro se muestra al elaborar la red de nociones básicas mediante el mapa conceptual correspondiente, al conectar y estructurar las nociones centrales de las distintas listas presentadas según los focos señalados.

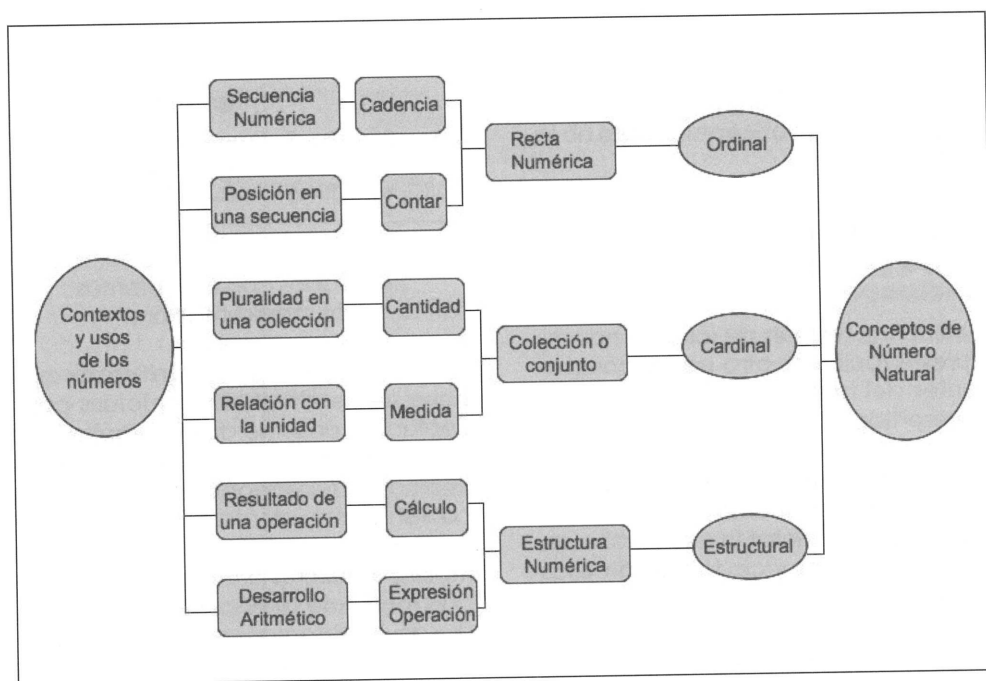


Figura 1. Mapa conceptual sobre diferentes significados del número.

Estructura conceptual y análisis de contenido

Con los mapas se inicia el análisis de contenido del tema. La delimitación de la estructura conceptual de un tópico matemático ubica los correspondientes conceptos y procedimientos y sus relaciones, establece prioridades, destaca conexiones y muestra las diversas opciones y trayectorias para organizar las expectativas sobre su aprendizaje; igualmente, aporta las referencias necesarias para establecer sus significados.

Los mapas conceptuales proporcionan una técnica para mostrar una estructura conceptual; como toda técnica hay diversas vías e interpretaciones, que llevan a una diversidad de mapas conceptuales. No conviene olvidar que tiene limitaciones ya que los mapas conceptuales son un modo de expresar la estructura conceptual, pero no la sustituyen.

Sistemas de representación

El estudio y revisión de los sistemas de representación es otra de las componentes del análisis de contenido. Por representación entendemos cualquier modo de hacer presente un objeto, concepto o idea. Conceptos y procedimientos matemáticos se hacen presentes mediante distintos tipos de símbolos, gráficos o signos y cada uno de ellos constituye una representación (Castro y Castro, 1997). Esos diferentes modos de representar comparten una estructura, y por ello se habla de sistemas de representación (Janvier, 1987).

Cada sistema de representación pone de manifiesto y destaca alguna peculiaridad del concepto que expresa; tam-

bién permite entender y trabajar algunas de sus propiedades. Los sistemas de representación son centrales en la caracterización del significado de las nociones matemáticas, y contribuyen a la comprensión de conceptos y procedimientos. Cada uno de ellos permite resaltar aspectos particulares de esos conceptos y de sus relaciones, y oculta otros.

Mediante las conexiones entre los sistemas de representación se muestra la riqueza de aspectos y relaciones involucrados en un concepto, como ocurre con las relaciones de la Figura 2 que exploran la igualdad $n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$:

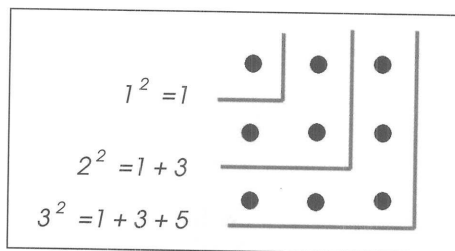


Figura 2. Formación de los números cuadrados con dos sistemas de representación.

Toda la complejidad de significados que pone de manifiesto la estructura conceptual de un tema de Matemáticas se hace operativa mediante sus diferentes sistemas de representación. Conocer un contenido se sustenta en el dominio de sus sistemas de representación y de los modos de expresar una misma propiedad mediante diversos sistemas. El estudio de los sistemas de representación de un tema matemático tiene como objeto que los profesores en formación desarrollen su capacidad para analizar diferentes formas de representación de los conceptos matemáticos involucrados en ese tema y explorar y mostrar sus diferentes conexiones.

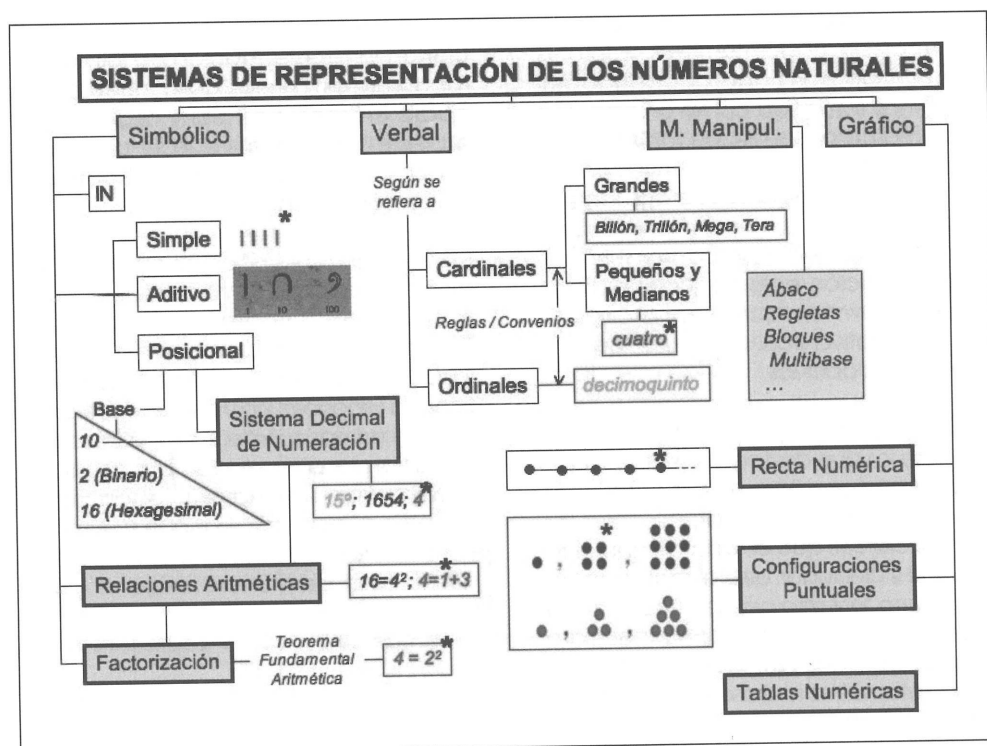


Figura 3. Sistemas de representación en el Sistema de los Números Naturales.

Sistemas de representación de los números naturales

Sistemas de Representación Simbólicos

Al considerar el Sistema de los Números Naturales, desde su estructura conceptual y desde una revisión histórica de su desarrollo (Ifrah, 1997), destacan cuatro modalidades de representación: simbólica, verbal, gráfica, y la que suministran los materiales manipulativos. La Figura 3 muestra la riqueza de sistemas que surgen del estudio de las diferentes modalidades de representación de los números naturales. Hemos señalado con asteriscos una ejemplificación de diferentes modos de representar el natural

4 en esos sistemas. Comentamos las principales características de algunos de los sistemas de representación considerados para los Números Naturales.

Dentro de esta modalidad de representación se consideran los sistemas para representar naturales dependiendo de si se usa una estructura simple, aditiva o posicional². Dentro de esta última sobresale el sistema decimal de numeración y, a partir de él, las relaciones numéricas y de factorización.

² Existen otros sistemas mixtos, como el sistema romano de numeración que posee estructura aditiva pero también con características posicionales. En este epígrafe sólo destacamos algunos ejemplos de sistemas de numeración para los casos aditivo y posicional.

En su forma más sencilla, está el *sistema simple*, en el cual los números naturales se emplean para contar cantidades pequeñas tomando como unidad una única marca que se repite tantas veces como sea necesario. Con motivo de utilizar símbolos para designar agrupaciones de la unidad, surgen los *sistemas aditivos*, entre los que destacan los sistemas de numeración egipcio y chino. Estos sistemas permiten escribir números grandes con relativa economía, usando sencillas reglas aditivas.

Finalmente están los *sistemas posicionales*, entre los que destaca el sistema decimal de numeración. La característica principal de los sistemas posicionales de numeración es que el valor de una cifra depende del lugar que ésta ocupe en un número. Por otro lado, se emplea una cantidad finita de cifras diferentes para representar todos los números, y esa cantidad determina la base o principio de agrupamiento de ese sistema de numeración. De manera general, el valor total de un número en un sistema con una base determinada, será la suma de cada dígito multiplicado por la potencia de la base correspondiente a la posición que ocupa en el número.

El empleo y estudio de relaciones aritméticas entre números (expresión de un número como suma, resta, producto y división de otros) pone de manifiesto nuevas formas de representar números naturales. Además, el estudio de la estructura multiplicativa muestra otras facetas de esos números. El Teorema Fundamental de la Aritmética establece, igualmente, una única forma de expresión de cada número en función de sus factores y ciertas propiedades multiplicativas.

Sistema de Representación Verbal

Vinculado al sistema de representación simbólico está el verbal, en el que las

reglas del lenguaje organizan y condicionan la representación de los números naturales. En este caso, nuestro lenguaje impone normas y reglas para representar números que se organizan en torno al uso del significado ordinal o cardinal de los naturales.

En el caso del significado ordinal, también existen un conjunto de reglas nemotécnicas para nombrar los diferentes órdenes, si bien existen convenios, avalados incluso por la Real Academia de la Lengua Española, por los que, entre otros, para referirnos a órdenes superiores a la decena, por ejemplo 15º, puede usarse indistintamente la expresión decimoquinto como quince, mientras que para órdenes inferiores debe usarse la clásica expresión ordinal de primero, segundo, etc.

Sistemas Gráficos de Representación

Dentro de esta modalidad de sistema de representación destacan la recta numérica y las configuraciones puntuales.

La primera representación gráfica que consideramos es la *recta numérica*. Su significado más inmediato es que los números naturales se pueden construir con regla y compás, usando un sencillo procedimiento que parte de que cualquier número natural n se obtiene como suma reiterada de la unidad n veces. Construimos una semirrecta y en su origen se considera el punto 0; por reiteración de un segmento unitario se pueden representar los restantes números.

En relación con las *configuraciones puntuales*, en la Figura 3 aparecen los primeros términos de la sucesión de números cuadrados y triangulares. Las configuraciones puntuales o números figurados, expresan en su estructura propiedades aritméticas que no son visibles en su representación decimal. Por ejemplo, en la Figura 2 observamos que cualquier

número cuadrado es suma de impares consecutivos. También existen números pentagonales, hexagonales, etc. En Castro (1995) puede encontrarse un amplio estudio de las configuraciones puntuales y sus propiedades.

Finalmente, destacamos aquellas representaciones de los naturales que se expresan mediante una tabla. Entre ellas destaca la Tabla-100, que consiste en representar los naturales del 1 al 100 en una tabla 10 x 10. En Rico y Ruiz (2004) se describen, ejemplifican y analizan en detalle estas relaciones. Las tablas de sumar y de multiplicar son variantes usuales de tablas numéricas. El Triángulo de Pascal es otra representación numérica en forma de tabla, construida sobre relaciones combinatorias.

Sistemas de representación y análisis de contenido

Los sistemas de representación constituyen elementos centrales para organizar la estructura conceptual de un tema. Mediante un trabajo explícito sobre la diversidad de sistemas de representación en una misma estructura y sobre las conexiones entre ellos, se profundiza en el dominio del contenido en estudio. La búsqueda de nuevas o diversas expresiones de una misma propiedad contribuye a clarificar y a profundizar el entramado de conceptos en que se sustenta.

Adquirir destrezas y desarrollar capacidades para seleccionar relaciones entre distintos sistemas de representación de un mismo concepto, con las cuales traducir sus propiedades y regularidades de un sistema a otro, proporciona una técnica para relacionar distintos conceptos, interpretar propiedades y des-

arrollar argumentos de prueba y demostración. Estas capacidades, derivadas del estudio de los sistemas de representación enriquecen la competencia de planificación de los profesores.

Análisis fenomenológico

¿A qué se refiere la fenomenología? Nuestra aproximación a la fenomenología se vincula con un planteamiento funcional de las Matemáticas escolares que afirma que las ideas y conceptos son el núcleo de nuestro pensamiento, las herramientas con las que pensamos. Esta aproximación sostiene que el pensamiento matemático surge de los fenómenos y que las estructuras matemáticas abstraen y organizan grandes familias de fenómenos de los mundos natural, social y mental. En el modelo funcional que seguimos, el significado de los conceptos matemáticos se logra mostrando su conexión con el mundo real, con los fenómenos en cuyo tratamiento se implican tales conceptos. El modelo funcional de la enseñanza de las Matemáticas destaca las herramientas conceptuales teniendo en cuenta los usos en que se ven implicadas.

El análisis fenomenológico que aquí se presenta pone el acento en el uso y aplicación de los conceptos, en los medios y en los modos en que, con ellos, se abordan distintas tareas y cuestiones cuando dan respuesta a problemas, cuando contribuyen a la comprensión de ciertos fenómenos. Este análisis propone mostrar la vinculación de conceptos y estructuras matemáticos con ciertos fenómenos que están en su origen, que los vinculan con los mundos natural, cultural, social y científico. Para ello se ayuda de la reflexión sobre situaciones y contextos, con la cual el profesor en formación inicia el análisis fenomenológico.

Situaciones

El análisis fenomenológico de una estructura matemática comienza por delimitar aquellas situaciones en las que tienen uso los conceptos matemáticos involucrados, aquéllas en las que éstos muestran su funcionalidad. Las situaciones destacan el medio en el cual una determinada estructura matemática tiene uso regular. Cualquier tarea matemática a la que se enfrenta un individuo viene asociada a una situación, considerando ésta como aquella parte del mundo real en la cual se sitúa la tarea para el individuo. Una situación viene dada por una referencia al medio (natural, cultural, científico y social) en el cual se sitúan tareas y cuestiones matemáticas que pueden encontrar los ciudadanos, que se proponen a los estudiantes y que centran su trabajo. Según el medio que destaquen, los expertos consideran distintos tipos de situaciones. Ejemplificamos aquí el caso de los números naturales con las situaciones del estudio PISA: personales, educativas o laborales, públicas y científicas (OCDE, 2005; pp. 41- 42).

Las situaciones personales son las relacionadas con las actividades diarias de los alumnos. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema. Estas situaciones se relacionan con prácticas cotidianas y suelen poner en juego los conceptos más básicos. En el caso del Sistema de los Números Naturales, la práctica de la secuencia numérica es el uso cotidiano más común y extendido. También el conocimiento de los números pequeños y de sus relaciones aditivas es obligado en la mayor parte de las situaciones personales.

Situaciones educativas, ocupacionales o laborales son las que encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo. Se refieren al modo en que el centro escolar o el lugar de trabajo proponen tareas que necesitan una actividad matemática para encontrar una respuesta. El mundo del trabajo incluye el conocimiento de horarios, retribuciones, manejo de cuentas corrientes, pagos y adquisiciones. La administración del tiempo, del dinero y la gestión de cantidades de determinados materiales forma parte de la práctica usual de la población adulta, en toda la gama de niveles laborales y sociales. El campo de aplicaciones y usos de los números en cada una de las profesiones de nuestra sociedad es objeto de reflexión y de enseñanza en la escuela.

Situaciones públicas se refieren a la comunidad local u otra más amplia, en la cual los estudiantes observen determinados aspectos sociales de su entorno o que aparezcan en los medios de comunicación. Los estudiantes como ciudadanos deben estar capacitados para interpretar, analizar y evaluar información numérica que se presente en los medios de comunicación, que forme parte de las decisiones que afectan a la vida política y social de una comunidad. También deben dominar las operaciones básicas para seguir argumentos cuantitativos, tener sentido del número, capacidad para hacer estimaciones y dominio de distintos códigos que se emplean en la presentación de datos numéricos.

Situaciones científicas son más abstractas e implican la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático. De hecho, cada una de las disciplinas científicas o técnicas hacen cierto uso técnico específico, en

ocasiones muy elaborado, de los conceptos y estructuras numéricas. El dominio de los distintos conjuntos numéricos junto con las estructuras matemáticas del Análisis y del Álgebra constituye el marco conceptual en el que se sitúan las aplicaciones y usos científicos numéricos más avanzados.

Contextos numéricos

Un contexto matemático es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, responden a unas necesidades como instrumentos de conocimiento. Los contextos de una determinada estructura se reconocen porque muestran posibles respuestas a la pregunta ¿en qué se usan estas nociones? El contexto refiere el modo en que se usan los conceptos, en una o varias situaciones.

En el Sistema de los Números Naturales son varios los contextos numéricos, ya que los números naturales satisfacen distintas funciones y atienden diferentes necesidades cuando se usan para contar y medir, para ordenar y cuantificar, para operar y simbolizar.

El contexto numérico más sencillo utiliza los números para *contar*; en este caso su utilidad consiste en asignar los términos de la secuencia numérica a los objetos de una colección, bien señalando cada objeto o marcando pautas y realizando espaciamientos temporales. Sin el dominio de la secuencia numérica, que es una función básica de dominio lingüístico, no es posible el uso de los números.

El segundo tipo de contexto es aquel que usa los números como *cardinal*; utilizamos este sentido cuando queremos dar respuesta a la cuestión ¿cuántos hay? ante una colección discreta de

objetos distintos. Cuantificar los objetos de un conjunto en el ámbito de la Educación Secundaria aparece en problemas diversos.

El contexto de *medida* permite conocer la cantidad de unidades de alguna magnitud continua; en este caso el sentido viene dado porque proporciona respuesta a la pregunta ¿cuánto mide? Un tipo específico de problemas en este contexto surge cuando se pretende obtener longitudes, superficies u otras magnitudes, o bien valores de magnitud en los que una divide necesariamente a la otra. Todas las aplicaciones del Sistema de los Números Naturales en la Física o la Economía se encuentran en este contexto.

Un cuarto tipo lo constituye el contexto *ordinal*, cuya modalidad propone conocer la posición relativa de un elemento en un conjunto discreto y ordenado; proporciona respuesta a la pregunta ¿qué lugar ocupa?

El contexto *operacional* es aquel en el que hay que dar respuesta a la cuestión ¿cuál es el resultado? Las acciones de agregar, separar, reiterar y repartir expresan multitud de *acciones sobre y transformaciones con los objetos*; también se pueden establecer relaciones de comparación e igualación. Todas estas acciones tienen su expresión en el Sistema de los Números Naturales mediante las operaciones aritméticas básicas que, a su vez, modelizan y proporcionan respuesta a las cuestiones cuantitativas que se plantean con las acciones mencionadas. La diversidad de problemas aritméticos aditivos y multiplicativos elementales muestran el contexto operacional básico.

Finalmente, un sexto tipo menos convencional, lo constituye el denominado contexto *simbólico* en el cual los núme-

ros se utilizan para distinguir y denominar clases de fenómenos o elementos, confundidos a veces con etiquetas; en cualquiera de ellos hay que dar respuesta a la cuestión ¿cuál es el código?

Se establecen así diferentes contextos numéricos basados, en las cuestiones planteadas y en los modos de uso de las estructuras numéricas. Conviene subrayar que determinadas tareas y problemas matemáticos pueden proponer, simultánea o consecutivamente, cuestiones que afectan a más de uno de los contextos considerados.

Fenómenos y subestructuras

Hemos visto que se puede reconocer el uso de un determinado tema en una variedad de situaciones. También hemos visto que conceptos y estructuras desempeñan diferentes funciones según el marco estructural —el contexto— en que los situemos, y que estos contextos son reconocibles, básicamente, por la cuestión o cuestiones a las que se proponen dar respuesta. Estas cuestiones permiten marcar los principales modalidades de uso y señalan, junto con las situaciones, las principales familias de fenómenos que están en el origen de la estructura conceptual que se considera.

Pero caracterizar la relación de una estructura matemática con los fenómenos sólo por el medio en que se localizan y por los modos en que los trata, es un resultado limitado. Familias de fenómenos y subestructuras se vinculan porque éstas modelizan a aquéllas y, así, expresan su sentido. Sostenemos que es posible establecer relaciones entre fenómenos y subestructuras, en las que cada fenómeno conecta con una subestructura que lo expresa matemáticamente

mediante su modelización, con la cual contribuye a plantear y resolver cuestiones y problemas vinculados a tales fenómenos o familias de fenómenos. Se pueden establecer parejas (subestructura, fenómeno), en las que la subestructura ofrece un modelo para el fenómeno. Nuestra técnica para el análisis fenomenológico concluye cuando vincula las familias de fenómenos con las subestructuras detectadas. Consideremos este tercer paso para el Sistema de los Números Naturales.

Análisis fenomenológico de los números naturales

El Sistema de los Números Naturales tiene un amplio campo de subestructuras, ya consideradas en el estudio de su Estructura Conceptual, que ofrecen distintos modelos para las acciones reales sobre objetos y cantidades. Entre las diferentes subestructuras destacan las establecidas inicialmente en los focos prioritarios:

1. El Sistema Decimal de Numeración, como subestructura orientada a representar verbal y simbólicamente los términos numéricos; la simbolizamos por S. D. N.
2. La subestructura de Orden de los números naturales, basada en la relación «siguiente de» o «sucesor de», con sus propiedades; la simbolizamos por $(N, \leq)$.
3. La subestructura Aditiva de los números naturales, basada en las relaciones aditivas (suma y resta) y en sus propiedades, que simbolizamos por $(N, +)$.
4. La subestructura Multiplicativa de los números naturales, subestructura basada en las relaciones multiplicativas (producto y división entera) y en sus propiedades; la simbolizamos por $(N, \times)$.

5. La subestructura Factorial de los números naturales, basada en el teorema fundamental de la aritmética, la relación de divisibilidad y sus propiedades.

Ejemplificamos con las subestructuras tercera y cuarta el tercer paso del análisis fenomenológico, ya que las operaciones numéricas dotan al Sistema de los Números Naturales de su gran poder modelizador y contribuyen a su uso dinámico (Freudenthal 1983).

Los fenómenos que están en la base del Sistema Aditivo son aquellos que se basan en la consideración de la unión de colecciones, en las acciones de juntar o añadir/ separar o segregar, en las comparaciones aditivas basadas en las relaciones cuánto más que/ cuánto menos que, y otras variantes similares; el listado de fenómenos aditivos puede ampliarse indefinidamente si se contemplan otras condiciones dadas por la situación concreta que se considere y otras variables. Abstrayendo el resultado, tenemos que la Subestructura $(N, +)$ se vincula con los contextos de cardinal, de medida y operacional, fundamentalmente, dando lugar a tres tipos de modelos o relaciones de las subestructuras con los fenómenos subyacentes; en la literatura especializada se presentan como Problemas Aritméticos Aditivos:

- Problemas Aditivos de Combinación,
- Problemas Aditivos de Cambio, y
- Problemas Aditivos de Comparación.

Los Problemas Aritméticos Aditivos no son modelos específicos de ninguna disciplina formal sino patrimonio común de la formación matemática para todos los ciudadanos.

Los fenómenos que están en la base del Sistema Multiplicativo son aquellos que se

basan en la consideración de la reiteración de colecciones, en las acciones de repetir/ repartir una cantidad, formar una cantidad varias veces mayor que otra/ o hacer un número dado de partes de una cantidad, en las comparaciones multiplicativas basadas en las relaciones tantas veces más que/ tantas veces menos que, en los emparejamientos de los elementos de dos colecciones y otras variantes similares; el listado de fenómenos multiplicativos puede ampliarse si se contemplan otras condiciones dadas por la situación concreta que se considere y otras variables. Según sus modos de uso, tenemos que la Subestructura $(N, \times)$ se vincula con los contextos de cardinal, de medida y operacional, fundamentalmente, dando lugar a tres tipos de modelos o relaciones entre las subestructuras y los fenómenos, que en la literatura especializada (Castro, 2001) se presentan como Problemas Aritméticos Multiplicativos:

- Problemas Multiplicativos de Proporcionalidad Simple,
- Problemas Multiplicativos de Producto Cartesiano, y
- Problemas Multiplicativos de Comparación.

Otra familia de fenómenos específicamente matemáticos, consistente en las relaciones multiplicativas entre números y su estudio, conecta con la subestructura $(N, \times)$.

Análisis fenomenológico y análisis de contenido

El primer paso que proponemos para el análisis fenomenológico consiste en el estudio de las situaciones vinculadas a la estructura en estudio; seguimos en este caso los tipos propuestos en el estudio PISA 2003. La delimitación de los distintos contextos es el segundo paso en

el análisis fenomenológico de un tema. Subrayamos que un contexto es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, es decir, responden a unas determinadas necesidades como instrumentos de conocimiento.

Este segundo paso del análisis fenomenológico de un tema delimita los contextos de uso, las demandas cognitivas a las que atienden tales conceptos y, por ello, las funciones cognitivas que satisfacen. Para llevarlo a cabo conviene enunciar las cuestiones o interrogantes a los que da respuesta la estructura conceptual considerada: ¿Cuáles son los usos principales de los conceptos y estructuras considerados? ¿A qué cuestiones e interrogantes dan respuesta?

A los efectos del análisis de contenido que venimos desarrollando, el análisis fenomenológico culmina cuando se establecen asociaciones entre las distintas familias de fenómenos detectados y las subestructuras y conceptos que conforman la Estructura Conceptual en estudio. En la realización del análisis fenomenológico se desarrollan capacidades tales como tipificar diferentes medios en los que se usan los conocimientos matemáticos; conectar las matemáticas con las ciencias experimentales, con el arte, la economía y otras ramas del conocimiento; atender distintos modos de uso de los conceptos, es decir, precisar las funciones que se llevan a cabo mediante la estructura contemplada, enunciar las cuestiones y familias de problemas a las que dan respuesta; finalmente, establecer relaciones entre fenómenos y subestructuras en tanto las segundas modelizan a los primeros.

Todas estas capacidades contribuyen a la competencia de planificación del profesor en formación, ya que son otros

tantos datos que conviene considerar en el momento de establecer las expectativas de aprendizaje para los alumnos, seleccionar y organizar los contenidos y diseñar secuencias metodológicas, ejemplos, motivaciones y materiales para su transmisión.

Análisis de contenido del sistema decimal de numeración

La capacidad del profesor en formación para sintetizar, estructurar y relacionar toda la información que brinda el análisis de contenido acerca de un tema de las Matemáticas escolares, se intensifica y desarrolla con la realización del mapa conceptual conjunto. Este mapa muestra la riqueza de relaciones entre los diferentes contenidos, el modo en el que se representan, y la funcionalidad de los mismos. Se pueden considerar diferentes criterios a la hora de elaborar un mapa para un tema. Ejemplificamos con la estructura Sistema de los Números Naturales el paso de mapas conceptuales centrados en focos al mapa global completo.

En el esquema de mapa conceptual de la Figura 4 ocupan un lugar central las nociones del Sistema Decimal de Numeración, los tres tipos de números ya mencionados en el primer foco, y los sistemas de representación que presentamos anteriormente.

Así, los números pequeños suelen representarse en tablas, en la recta o mediante configuraciones puntuales. Para los números medianos se maneja la escritura en forma factorizada, además, los números grandes requieren también la notación científica. Por otra parte, todos los números se pueden representar en el Sistema Decimal de Numeración.

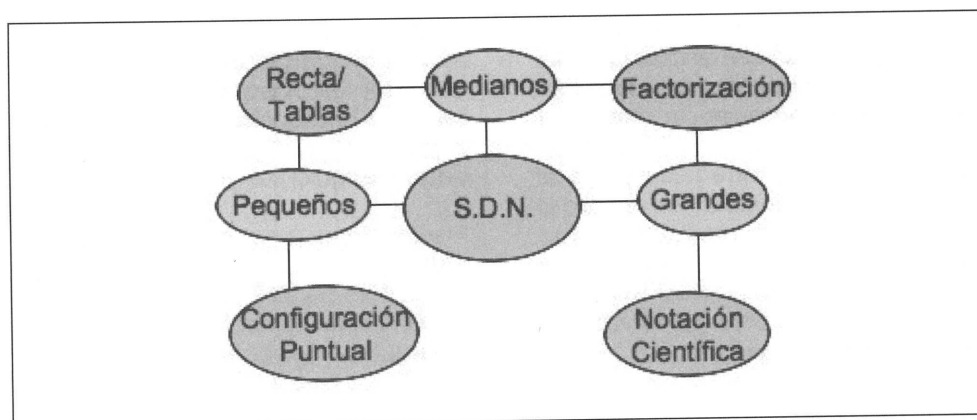


Figura 4. Aproximación al mapa conceptual del Sistema de los Números Naturales.

Cuando se incorporan nuevos conceptos y procedimientos ligados a los focos prioritarios tercero, quinto y sexto del Sistema de los Números Naturales y a nociones referentes a estrategias de resolución de problemas y otros usos y significados del número, con sus corres-

pondientes conexiones, tenemos un mapa que expresa mayor complejidad. Los cuatro contextos de usos del número natural aparecen en los vértices del mapa que se muestra en la Figura 5, en donde también se introducen los diferentes tipos de problemas aritméticos.

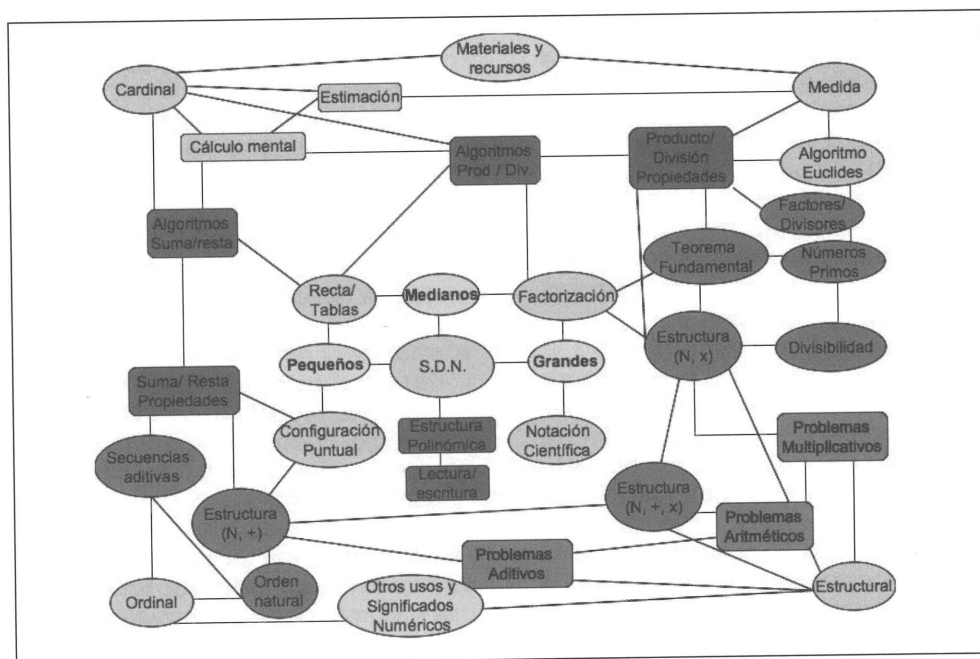


Figura 5. Mapa conceptual del sistema de los números naturales.

El resultado más importante de esta actividad es la riqueza del análisis de relaciones entre conceptos y procedimientos, representaciones y aspectos fenomenológicos que el profesor en formación realiza, lo que contribuye al dominio de la estructura en estudio a los efectos de su consideración como objeto de enseñanza y aprendizaje. Se enriquece así el conocimiento que el profesor tiene sobre los contenidos de las matemáticas escolares.

Conclusiones

Este trabajo está centrado en una de las competencias profesionales básicas para el profesor, considerada en un contexto de formación inicial de profesores de matemáticas de Educación Secundaria: la planificación. Para determinar y establecer un conjunto de capacidades que contribuyen al desarrollo de esa competencia en el contexto considerado, se explicita qué se entiende por Matemáticas escolares, significado de un concepto y análisis de contenido, así como la complementariedad de estas ideas. Se ha disertado con cierto detalle sobre la complejidad detectada por estas nociones y se ha realizado un estudio sobre la diversidad de significados de una estructura matemática, las fases para su tratamiento técnico y las capacidades que se impulsan.

En este marco las decisiones basadas en el análisis de contenido se centran, en primer lugar, sobre la noción de estructura conceptual, en segundo lugar sobre los sistemas de representación y, en tercer lugar, sobre el análisis fenomenológico. En cada una de estas fases hay una serie de pasos y técnicas que organizan el análisis de contenido, que se han detallado y ejemplificado para el tema Sistema de los Números Naturales en Educación Secundaria.

La principal finalidad ha ido orientada a mostrar el dominio sobre el contenido y desarrollo de capacidades que contribuyen a la planificación del profesor competente. Entre ellas hemos destacado las siguientes:

- seleccionar focos conceptuales prioritarios en cada uno de los temas del currículo de Matemáticas de Educación Secundaria;
- establecer los conceptos y procedimientos que se articulan en cada foco;
- sintetizar y expresar la estructura de un tema mediante diversos mapas que organicen su complejidad;
- relacionar distintos sistemas de representación de un mismo concepto y traducir sus propiedades y regularidades de un sistema a otro;
- relacionar mediante distintos sistemas de representación los conceptos y propiedades así como desarrollar argumentos de prueba y demostración;
- tipificar diversos medios en los que se usan unos determinados conocimientos matemáticos;
- conectar las Matemáticas con las ciencias experimentales, con el arte, la economía y otras ramas del conocimiento;
- atender distintos modos de uso de los conceptos y precisar las funciones que se llevan a cabo mediante la estructura contemplada;
- establecer relaciones entre fenómenos y subestructuras en tanto las segundas modelizan a los primeros; y
- enunciar cuestiones y familias de problemas a los que las subestructuras dan respuesta.

Planificar el aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas escolares no es tarea trivial, se trata de una competencia profesional importante que supone el dominio de diversos campos y el desarrollo de ciertas capacidades para interpretar

y organizar su conocimiento. La formación profesional del profesor de Matemáticas de Secundaria debe incluir una preparación didáctica específica sobre planificación, de la cual el análisis de

contenido es sólo un primer paso para interpretar el conocimiento matemático en términos de las Matemáticas escolares, al que hemos dedicado este trabajo.

Dirección de contacto:

Luis Rico Romero, Jose Luis Lupiáñez Gómez, Antonio Marín Marín y Pedro Gómez Guzmán.

Departamento de Didáctica de la Matemática

Facultad de Ciencias de la Educación

Universidad de Granada

Campus de Cartuja

18071 GRANADA

E-mail: lrico@ugr.es, lupi@ugr.es, amarin@ual.es y pgomez@valnet.es

Referencias

- BELL A., COSTELLO J. & KÜCHEMANN D. (1983). *Research on learning and teaching. A Review of Research in Mathematical Education*. Windsor: NFER- Nelson.
- CASTRO, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Comares.
- CASTRO, E. (2001). Multiplicación y división. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.
- CASTRO, E. y CASTRO E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.): *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.
- DEVLIN, K. (1994). *Mathematics: The Science of Patterns*. New York: Scientific American Library.
- FREGE, G. (1996). *Escritos filosóficos*. Barcelona: Crítica.
- FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures*. Dordrecht: Reidel.
- GÓMEZ, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- HIEBERT, J. y LEFEBRE, P. (1986). *Conceptual and Procedural Knowledge: the case of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- IFRAH, G. (1997). *Historia Universal de las Cifras*. Madrid: Espasa Calpe.
- JANVIER, C. (Ed.) (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (2000). *Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre que modifica el Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Boletín Oficial del Estado.
- OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.
- RICO, L. (1995). Consideraciones sobre el Currículo Escolar de Matemáticas. *Revista EMA*, 1, 4-24.
- RICO, L. (1997). Los Organizadores del Currículo de Matemáticas. En Rico, L. (Coord.): *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 39- 59). Barcelona: Horsori.

RICO, L. Y RUIZ, F. (2004). Geometric Visualization of Additive Operators. En B. Clarcks y cols. (Eds.): *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 351-362). Goteborg: Nacional Center for Mathematical Education.

RUCKER, R. (1988). *Mind Tools. The Mathematics of information*. London: Penguin Books.

STEEN, L. (Ed.) (1990). *On the shoulders of Giants*. Washington D. F.: National Academy Press.