

Las interpretaciones de la división de fracciones en textos históricos de enseñanza

Mauricio Contreras del Rincón, IES Benicalap-Valencia
Bernardo Gómez Alfonso, Universidad de Valencia

Resumen

En este artículo se describen las concepciones epistemológicas de la división de fracciones localizadas en una revisión de libros de texto antiguos y modernos. Éstas se agrupan en cuatro grupos, a partir de las interpretaciones conocidas de división de enteros (partición, medida, inversa de la multiplicación y proporción).

Palabras clave

Análisis histórico-epistemológico, análisis de libros de texto, fracciones, división de fracciones.

Abstract

In this report on describe the epistemological conceptions of the fractions' division, locates in a revision of historic textbooks. These conceptions on characterize and to get in four meaning groups, using as reference the know interpretations of whole' division (partition, measure, inverse of multiplication and proportion).

Key words

Historic-epistemological, analysis, textbooks analysis, fractions, fractions' division.

El problema a investigar

El presente trabajo sintetiza una parte de la investigación que se está llevando a cabo como tesis doctoral en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia. La investigación se enmarca en la línea seguida por los miembros del grupo de Pensamiento numérico y algebraico (PNA) de dicho Departamento, en relación con el campo conceptual de la estructura multiplicativa.

Este campo conceptual es uno de los que mayores contribuciones ha aportado al estudio de los procesos aritméticos de los estudiantes (ver, por ejemplo, las actas del PME), especialmente en relación con los problemas de multiplicación y división. Las fracciones son un concepto asociado a la división y multiplicación que juegan un papel importante en el análisis de las estructuras multiplicativas.

Las fracciones también forman parte de otro gran tema de investigación, los conceptos de número racional, una de las ideas matemáticas más complejas e importantes que encuentran los niños durante su escolarización obligatoria. Su importancia puede ser vista desde una variedad de perspectivas: práctica, psi-

cológica o matemática. Desde la primera, involucra habilidades para comprender y resolver problemas de la vida real, desde la segunda es un área para desarrollar estructuras mentales necesarias para continuar el desarrollo intelectual, y desde la tercera sienta las bases en las que se apoyan las operaciones algebraicas elementales (Behr, Lesh, Post, y Silver, 1983, p. 91).

Mucha de la investigación realizada en relación con los números racionales se sustenta en la asunción de que el actual currículo dota de una perspectiva limitada al campo conceptual multiplicativo y que el aprendizaje con comprensión requiere un amplio abanico de experiencias (Lamon, 1993, p. 132).

Así, por ejemplo, se ha señalado (Lamon, 2001, p. 147) que la enseñanza tradicional, que se sustenta en una breve introducción de la interpretación *parte/todo* de las fracciones, seguida de una más o menos larga práctica con sus algoritmos de cálculo, ha producido como resultado que algunos estudiantes sean incapaces de resolver una gran variedad de problemas o cuestiones donde están involucrados los símbolos de fracción. Por lo que, basar la instrucción en una sola y selectiva interpretación de las fracciones, introduciendo sólo algunas de sus representaciones, puede llevar a los estudiantes a apoyar su comprensión del campo de los números racionales en fundamentos inadecuados.

En relación con las operaciones de multiplicación y división, Fischbein et al. (1985) señalan algunos factores que afectan a las dificultades que manifiestan los estudiantes cuando resuelven problemas aritméticos, entre ellos se encuentra la familiaridad con el contexto, el tipo de cantidades involucradas y el tamaño, el tipo de números que

se usan, y ciertas rigideces asociadas con operaciones específicas. Por ello enuncian que «cada operación aritmética fundamental permanece generalmente vinculada a un modelo intuitivo primitivo, implícito e inconsciente. Estos modelos implícitos derivan de la forma en que los estudiantes han sido introducidos en los conceptos de multiplicación y división. La identificación de la operación que se necesita para resolver un problema con dos ítems de datos numéricos no ocurre directamente sino que está mediatizada por el modelo. El modelo impone sus propias restricciones en el proceso de búsqueda» (p. 4).

En el presente trabajo recogemos estas posiciones teóricas (limitación de interpretaciones de número racional, modelos relacionados con las operaciones, y análisis estructural de las relaciones multiplicativas), y situamos el tema de estudio en los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones.

Hipótesis

La indagación parte de la hipótesis de que el modelo actual de enseñanza no tiene en cuenta la riqueza de las variables involucradas en los problemas de la división de fracciones (modelos físicos, interpretaciones, estructura, contextos, esquemas de resolución y algoritmos). La limitación usual de estas variables, junto con la tendencia a extender ciertos conceptos de los números naturales a los números racionales (al basar la adquisición de los conceptos de número racional en los números naturales), como si el pasar de un campo numérico al otro fuera un peldaño fácil, hace pensar en la existencia de interferencias, mediatizaciones y condicionamientos, en relación con la competencia de los estudiantes para comprender y resolver este tipo de problemas.

Metodología

Nuestro objetivo es categorizar problemas-tipo de división de fracciones con objeto de diseñar un cuestionario de lápiz y papel que permita establecer relaciones entre las variables del problema y las variables de resolución que utilizan los estudiantes en sus respuestas¹.

Para categorizar problemas-tipo, en el presente trabajo, se han elegido tres de las variables de los problemas de división de fracciones: la estructura del problema (Vergnaud, 1991), las interpretaciones de la división (Fischbein, Deri, Nello y Marine 1985, y Vergnaud, 1991) y los constructos de fracción (Kieren, 1976 y Behr, Lesh, Post y Silver, 1983), que se sintetizan en el siguiente esquema:

	Las tres variables de un ...
Problema división fracciones	Estructura del problema
	Interpretaciones de la división
	Constructos de fracción



En un trabajo anterior (Contreras y Gómez, 2006), se utilizaron la primera y tercera variables: «estructura del problema» y «constructos de fracción», junto con los contextos y modelos físicos, para seleccionar una muestra de problemas de división de fracciones, que se propuso en forma de cuestionario a estudiantes de secundaria, en un intento de contrastar las hipótesis de partida señaladas antes.

¹ (...) Indagar cómo se presentan e interrelacionan en la enseñanza estas variables. (...) Indagar su incidencia en las respuestas de los estudiantes (...): qué variables del problema tienen en cuenta, qué variables de resolución utilizan, y qué interrelación se puede observar entre ellas. (Contreras y Gómez, 2006, p. 172).

En este artículo, presentamos el resultado de una revisión de libros antiguos y modernos orientada a localizar los valores que toma la tercera variable: «las interpretaciones de la división de fracciones», con el fin de completar «la parrilla» de valores de las variables con las cuales clasificar los problemas de división de fracciones.

Las interpretaciones de la división de números enteros

Aunque en la investigación precedente recogida en la literatura afín, se usan otros términos (por ejemplo «modelos»), aquí se usa el término «interpretación» para referirse a cada uno de los cuatro casos prototípicos de problemas de situación de la división: partición, medida, inversión del producto cartesiano y razón unitaria.

1. Partición y medida han sido perfectamente descritos en los dos «modelos primitivos implícitos» por Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985).
2. Partición (también conocido como «repartir»). Un objeto o colección de objetos se divide en un número dado de fragmentos iguales o subcolecciones. El dividendo debe ser mayor que el divisor; el divisor debe ser un número entero; el cociente debe ser menor que el dividendo.

Medida (también conocida como «cuotición»). Se busca determinar cuántas veces una cantidad dada está contenida en otra cantidad mayor. En este caso la única restricción es que el dividendo debe ser mayor que el divisor. Si el cociente es un número entero, el modelo puede ser visto como sustracción repetida.

3. Inversión del producto cartesiano se refiere a una operación binaria que puede ser representada en una tabla

de doble entrada o matriz (Hart, 1980, p. 31). Esta estructura es la que explica la relación multiplicativa que Vergnaud (1991) denomina «producto de medidas».

Inversión del «producto de medidas». Consiste en encontrar una de las medidas elementales cuando se conoce la otra, y la medida producto (op. cit. p. 222). En el caso discreto se ejemplifica con problemas de combinatoria y en el caso continuo con problemas de área.

4. Razón unitaria se refiere a la reinterpretación de la comparación multiplicativa de cantidades de magnitudes de naturaleza diferente en términos de la unidad de una de ellas. En español se trata de una «tasa» («rate», en inglés). Es esencial el hecho de que la comparación sea multiplicativa («a es m veces mayor/menor que b»), porque también se puede hacer la comparación aditiva («a tiene m unidades más/menos que b»).

Razón unitaria. Consiste en determinar el valor unitario (una cantidad de magnitud que corresponde a una unidad de otra magnitud), conociendo el vínculo de correspondencia entre dos magnitudes («a unidades de una por cada b unidades de la otra»).

En los libros de texto consultados estas interpretaciones se encuentran en los distintos enfoques que se usan para definir la división. A menudo no aparecen aisladas, sino que aparecen juntas y enlazadas con algún tipo de matización y aclaración, como se ilustra en las dos citas siguientes:

- Resta repetida como inversión de la multiplicación entendida como adición repetida y para hallar el «factor perdido». Partición, para repartir en partes iguales, y, medición para ave-

riguar el número de partes, conocido el tamaño de cada una de ellas.

Puesto que el producto de la multiplicación de dos números cualesquiera equivale a uno de estos tomado tantas veces como unidades tiene el otro; siempre que nos ocurra el caso de conocer algún producto y uno de sus factores, y deseamos determinar el otro factor, lo podremos conseguir averiguando por medio de la sustracción cuántas veces está contenido en el producto dado el factor que de él suponemos conocido (...). A este modo de descomponer un número con el fin de averiguar cuántas veces contiene a otro, se le ha dado el nombre de división o partición, porque sirve para dividir o repartir un número dado en partes iguales y determinar la magnitud de cada una, sabiéndose de antemano cuántas sean y también para investigar el número de esas partes cuando conozcamos anteriormente la magnitud de una de ellas (...) (Lacroix, 1846, p. 70)

- Resta repetida como medición, para averiguar el número de veces que un número está contenido en otro. Repartir un número de cosas entre un número de personas, e inversa de la multiplicación como búsqueda del «factor perdido».

Vamos ahora a tratar de la segunda operación de disminuir que se origina de la resta, cuando intentamos averiguar cuántas veces se puede restar el sustraendo del minuendo; y como tantas veces como se pueda restar, de tantas veces el sustraendo se compondrá el minuendo, de tantas veces estará contenido el sustraendo en el minuendo, queda reducida entonces esta operación de restar a la de dividir; y se dice que dividir es averiguar cuántas veces un número contiene a otro (...). De esto

mismo se deduce también que se puede dar origen a la división, considerando que hay que repartir un cierto número de cosas entre un cierto número de personas; (...) También pudiéramos haber dado origen a la división de su inversa la multiplicación, diciendo que dividir es buscar un número que multiplicado por el divisor dé el dividendo, o que es una operación por medio de la cual, dado un producto y uno de los factores, venimos en conocimiento del otro factor» (Vallejo, 1813, pp. 43-44).

La interpretación «razón unitaria», la hemos encontrado bajo la forma de comparación entre el dividendo y el divisor:

- Hallar el número que se encuentra con la unidad en tal proporción como el dividendo con el divisor:

$$\frac{D}{d} = \frac{C}{1}.$$

(...) partir un número por otro, es buscar un otro número tercero que se haya con la unidad en tal proporción como el número que partimos con el partidor

(Pérez de Moya, 1562, pp. 115 y 139).

Además, hemos encontrado otra interpretación de la división como razón que corresponde a la comparación multiplicativa entre el dividendo y el cociente.

Hallar el número que es tantas veces menor que el dividendo como unidades tiene el divisor:

$$\frac{D}{C} = \frac{d}{1}.$$

(...) Multiplicando el cociente por el divisor, o haciendo el cociente tantas veces mayor como unidades tiene el divisor, acabamos de ver que obtenemos el dividendo; luego el cociente es tantas veces menor que el dividendo como unidades tiene el divisor; por lo que, cuando el divisor es un número entero, puede definirse la división diciendo que dividir es hacer un número tantas veces menor como unidades tiene otro. (Dalmau, 1898, p. 45).

Se resumen las interpretaciones de la división de enteros identificadas en los textos en el siguiente cuadro:

MODELO	INTERPRETACIÓN
Partición	Repartir
Medida	• Hallar el número de veces que el divisor está contenido en el dividendo • Hallar el número de veces que el divisor se puede restar del dividendo
Inversión de la multiplicación	• Inversa del producto de factores - Factor perdido • Inversa de la adición repetida: resta repetida • Inversa del producto cartesiano²: caso discreto (combinatoria) y caso continuo (área)
Razón.	• El número que se encuentra con la unidad en tal proporción como el dividendo con el divisor. • Hacer el dividendo tantas veces menor como indica el divisor.

² Aunque esta interpretación no se ha encontrado en los textos históricos consultados, aparece sin embargo en textos más modernos y en la investigación afín precedente.

Las interpretaciones de la división de fracciones

Señalan Sinicrope, Mick y Kolb (2002, p. 153), que la división de fracciones puede explicarse por extensiones de las tres interpretaciones usuales de la división de enteros, que para ellos son: partición, medida e inversión del producto cartesiano, pero que estas extensiones no son suficientes: «*la división como la determinación de una razón unitaria y la división como la inversa de la multiplicación son también importantes interpretaciones de la división de fracciones*».

En los textos históricos consultados están reflejadas estas extensiones, de un modo que pone de manifiesto como se restringen o adaptan al nuevo campo numérico de los racionales.

- La partición, sólo se ha encontrado restringida al caso de la división de una fracción por un número entero:

Repartir $\frac{3}{7}$ de torta entre 5 niños equivale a pedir una fracción que, multiplicada por 5, dé $\frac{3}{7}$. Para distribuir $\frac{3}{7}$ de torta entre 5 niños, bastará que divida cada séptimo de torta en 5 partes y dé tres de estas nuevas partes a cada niño. Como la torta entera tendrá ahora $7 \times 5 = 35$ de estas partes nuevas, la fracción correspondiente a cada niño es:

$$\frac{\frac{3}{7}}{5} = \frac{3}{35}.$$

(Rey Pastor y Puig Adam, Elementos de Aritmética, 1932, p. 207).

- La medición, se ha encontrado bajo la forma de averiguar ¿cuántas veces cabe una fracción como, por ejemplo $\frac{2}{3}$, en otra, como por ejemplo $\frac{4}{5}$?

(...) la razón de esta regla es, que partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ es buscar quantas veces $\frac{2}{3}$

cabe en $\frac{4}{5}$; pero se viene a los ojos que pues el divisor expresa tercios, cabrá en el dividendo tres veces mas que si expresara enteros, luego se ha de dividir primero por 2, y multiplicar después por 3, lo mismo cabalmente que tomar tres veces la mitad del dividendo, o multiplicar por $\frac{2}{3}$ (Bails, 1818, p. 63).

- La razón unitaria se ha encontrado como una extensión tal cual de la interpretación razón unitaria con enteros.

(...) es el mismo intento que el partir enteros, y tantas veces como el dividendo contiene al divisor, otras tantas el quociente contiene a la unidad; y así son proporcionales, el dividendo, divisor, quociente y unidad... (Corachán, 1699, pp. 109 y 110).

- Sin embargo la otra modalidad de la razón, se ha encontrado de forma diferente al caso de los enteros. Al ser el divisor una fracción, la extensión de esta interpretación consiste en hacer el dividendo tantas veces menor como indica el numerador del divisor y tantas veces mayor como indica el denominador del divisor. Por tanto la fracción actúa como un operador doble.

Para dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$ observaremos, que si solo tuviésemos que dividir por 2, numerador del divisor $\frac{2}{5}$, estaba reducida la operación á hacer dos veces menor el quebrado, lo que se consigue multiplicando su denominador por 2, de manera que $\frac{3}{8}$ sería el cociente; pero nosotros no teníamos que dividir por 2, sino por $\frac{2}{5}$, que es cinco veces menor que el verdadero; y así, para obtener este, debemos hacer aquel cinco veces mayor; lo cual se consigue multiplicando su numerador por 5; de manera que ejecutándolo, tendré por cociente verdadero

$$15 \div 8 = 1 \frac{7}{8} \text{ (...) (Vallejo, 1813, p. 120)}$$

- Finalmente, la interpretación *inversa de la multiplicación*, se ha encontrado en la modalidad de factor perdido no sólo bajo la forma propiamente aritmética, sino también bajo nuevas formas que involucran un nivel más elevado de generalidad.

a) Forma aritmética: se razona sobre expresiones numéricas, mediante comprobación, introduciendo el concepto de divisor invertido.

Sea dividir $2/3$ por $5/7$, como el cociente multiplicado por el divisor da el dividendo, dicho cociente es el producto del dividendo por el divisor invertido, esto es,

$$\frac{2}{3} \times \frac{7}{5};$$

pues este producto multiplicado por $5/7$ es igual al dividendo $2/3$; en efecto

$$\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}.$$

Luego para dividir un quebrado por otro se multiplica el dividendo por el divisor invertido, o lo que es igual, se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el denominador del dividendo por el numerador del divisor, siendo el primero de estos productos el numerador y el segundo el denominador del cociente buscado (Fernández y Cardín, 1863, p. 63).

b) Forma algebraica: en un primer nivel de generalidad se razona sobre letras, mediante comprobación, introduciendo el concepto de inverso del divisor (con el significado de recíproco):

(...) Hemos llamado cociente al número que multiplicado por el divisor da como producto el dividendo; pero, ¿existe tal número?; y si existe, ¿será único o habrá varios? Mientras no se aclaren estas dudas la definición carecerá de valor, pues sólo será el planteamiento

de un problema, sin saber si admite solución. Sea a/m el dividendo y sea b/n el divisor; si en éste es $b \neq 0$, podemos formar el inverso y multiplicar el dividendo por este inverso. Resulta así un número que cumple la condición impuesta al cociente. En efecto:

$$\left(\frac{a}{m} \cdot \frac{n}{b}\right) \cdot \frac{b}{n} = \frac{a}{m} \cdot \frac{n}{b} \cdot \frac{b}{n}$$

y asociando los dos últimos factores, en virtud de la propiedad asociativa de la multiplicación, como su producto parcial es 1, resulta como producto total a/m (Rey Pastor y Puig Adam, 1936, p. 37).

En otro nivel de generalización se considera la división de fracciones como la resolución de una ecuación, introduciendo el concepto de recíproco del divisor:

Supuestos los enteros $b \neq 0$, $b' \neq 0$, $a' \neq 0$, al tener en cuenta la definición de igualdad, la resolución en x, x' de la ecuación

$$\frac{b}{b'} \cdot \frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}$$

equivale a la de $a' b x = a b' x'$.

Esta se verifica para $x = a b'$ y $x' = a' b$ (en que para $a' \neq 0$ es $x' \neq 0$, cuando, y solo cuando, sea $b \neq 0$. Esta solución es única, pues otra solución x_1/x_1 , al verificar $a' b x_1 = a b' x_1$ será igual a la dada por

$$\frac{x}{x'} = \frac{a b'}{a' b} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b'}{b} \text{ en que } \frac{b'}{b} \cdot \frac{b}{b'} = 1.$$

Por lo tanto, en el campo racional, la división de divisor no nulo, es decir la resolución de la ecuación $\beta \cdot \epsilon = \alpha$ ($\beta \neq 0$) es siempre posible unívocamente. Si dos números se llaman recíprocos cuando su producto es la unidad, todo número $b \neq 0$ tendrá un solo recíproco $1/b$, y podrá darse como regla general de división: el cociente $\alpha : \beta$ con $\beta \neq 0$ se obtiene multiplicando el dividendo α por el recíproco del divisor β , es decir, $\alpha : \beta = \alpha \cdot (1/\beta)$ ($\beta \neq 0$) (Rey Pastor, Pi Calleja y A. Trejo, 1957, p.69).

- c) Forma estructural. En un primer nivel de generalidad, se introduce el concepto de fracción inversa de una dada y se considera la división de fracciones como el producto del dividendo por la fracción inversa del divisor, aunque sin utilizar letras; después se razona mediante comprobación:

Fracción inversa de una dada: ¿Cuál es la fracción que multiplicada por $5/8$ es igual a 1? Observa:

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{5} = \frac{40}{40} = 1.$$

Se dice que $8/5$ es la fracción inversa de $5/8$. Fíjate que, de igual modo, $5/8$ es la fracción inversa de $8/5$. Decimos también que $5/8$ y $8/5$ son fracciones inversas entre sí. Dos fracciones son inversas cuando su producto es igual a la unidad.

División de fracciones: ¿Cuál es la fracción que multiplicada por $3/5$ es igual a $1/4$? ¿ $3/5 \cdot ? = 1/4$? La fracción que buscamos es el resultado de

$$\frac{1}{4} : \frac{3}{5} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{12} \rightarrow$$

→ La fracción buscada es $\frac{5}{12}$.

$$\text{Comprobación: } \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}.$$

El cociente de dos fracciones es igual al producto del dividendo por la frac-

ción inversa del divisor (Bujanda y Mansilla, 2002, p. 42)

En el nivel más alto de generalización, la operación de división de fracciones se presenta como consecuencia de la propiedad algebraica de existencia de inversos en $Q^* = Q - \{0\}$ respecto de la multiplicación en una estructura de cuerpo y las fracciones se consideran como representantes de clases de equivalencia:

División en Q : Dados dos números racionales α y β , por ser Q^* un grupo multiplicativo, la ecuación $\alpha x = \beta$ con $\alpha \neq 0$ admite solución en Q , pues multiplicando los dos miembros de la ecuación por α' , inverso de α , resulta: $\alpha' \alpha x = \alpha' \beta$. O sea: $x = \alpha' \beta = \beta \alpha'$. El número $\delta = \beta \alpha'$ se llama cociente de β por α y se representa por $\beta : \alpha$. Es decir: $\beta : \alpha = \beta \alpha'$. Si es

$$\alpha = \text{cl} \left(\frac{a}{a'} \right) \text{ y } \beta = \text{cl} \left(\frac{b}{b'} \right),$$

se tiene:

$$\beta : \alpha = \text{cl} \left(\frac{b}{b'} \right) : \text{cl} \left(\frac{a}{a'} \right) = \text{cl} \left(\frac{b}{b'} \right) \cdot \text{cl} \left(\frac{a'}{a} \right) = \text{cl} \left(\frac{ba'}{b'a} \right).$$

En la práctica, se escribe: $\frac{b}{b'} : \frac{a}{a'} = \frac{ba'}{b'a}$.

(Valdés y Santos, 1975, p. 40 – 41).

Las interpretaciones de división de fracciones localizadas en los textos se resumen en el siguiente cuadro:

MODELO	INTERPRETACIÓN
Partición	Solo cuando el divisor es entero
Medida	• Averiguar cuántas veces cabe una fracción en otra o cuántas veces la contiene
Razón-proporción	• Razón unitaria • Razón «tantas veces mayor/menor....
Inversión de la multiplicación	• Forma aritmética • Forma algebraica • Forma estructural

Implicaciones educativas

El estudio anterior permite señalar algunas implicaciones que se derivan del cambio de campo numérico (de los enteros a los racionales). Estas implicaciones se manifiestan en las formas en que se extienden las interpretaciones de la división de enteros a la división de fracciones.

1. La división-partición no se extiende cuando el divisor es fraccionario.
2. En el caso de la división-medida, la interpretación de un cociente fraccionario como el «número de veces» que cabe el divisor en el dividendo o que el dividendo contiene al divisor se ha extendido, aunque débilmente fundamentada, ya que, en los textos consultados, no se explica qué significa que un número contenga a otro un «número fraccionario de veces».
3. La forma de resta sucesiva, «averiguar cuántas veces se puede restar una fracción de otra», no se ha encontrado en los textos.
4. La interpretación de dividir como razón-proporción «hacer el dividendo tantas veces menor como indica el divisor», se ve alterada por la naturaleza fraccionaria del divisor. Ahora dividir significará «hacer el dividendo tantas veces menor como indica el numerador del divisor y tantas veces mayor como indica el denominador del divisor».
5. La inversión del producto cartesiano no se ha encontrado en los textos

revisados, ni en el caso continuo (área) ni en el caso discreto (o combinatorio). Tal vez porque la revisión se ha centrado en la parte dedicada a la Aritmética.

Estas extensiones en la forma en que han sido observadas reflejan cogniciones de los autores «petrificadas» (en el sentido de Puig, 2006), que han estado vigentes en la historia de las ideas matemáticas. Estas cogniciones hoy se consideran sofisticadas, obsoletas e inadecuadas para la enseñanza.

Queda por ver si estas cogniciones, que la enseñanza actual no tiene en cuenta, se ven reflejadas en las extensiones que hacen los estudiantes de sus ideas sobre la división de enteros al pasar a la división de fracciones, y la disponibilidad que tienen de ellas para reconocer la operación que se necesita para resolver los problemas de división de fracciones que corresponden a esas interpretaciones.

Como se ha dicho antes, nuestro propósito es utilizar estas interpretaciones, una vez categorizadas en los cuatro grupos semánticos aquí señalados, para seleccionar tipos de problemas que formen parte de un cuestionario con el que estudiar las respuestas de los estudiantes a problemas de división de fracciones, con objeto de investigar si existen interrelaciones entre las interpretaciones localizadas en textos históricos y las observadas en las respuestas de los estudiantes.

Dirección de contacto:

Mauricio Contreras del Rincón
IES Benicalap
Dr. Nicasio Benlloch, s/n
46015 VALENCIA
mauriciocontreras@wanadoo.es

Bernardo Gómez Alfonso
Departamento de Didáctica de las Matemáticas
E. U. Magisterio
Universidad de Valencia
Apartado de Correos 22045
46071 VALENCIA
bernardo.gomez@uv.es

Referencias

- BAILS, B. (1818). *Principios de Matemática de la Real Academia de San Fernando*. Imprenta de Joaquín Ibarra. Quinta edición. Tomo I. Pgs. 47, 48 y 63.
- BEHR, M. J., LESH, R., POST, T. & SILVER, A. (1983). Rational Numbers Concepts. En R. Lesh, R. & M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 9-126). Orlando: Academic Press.
- BUJANDA, M. P. Y MANSILLA, S. (2002). *Números. Matemáticas 2.º ESO*. Madrid: SM.
- CONTRERAS, M. Y GÓMEZ, B. (2006). Sobre problemas multiplicativos relacionados con la multiplicación de fracciones. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. X simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 171-184). Huesca: Universidad de Zaragoza.
- CORACHÁN, J. BAUTISTA (1699). *Arithmetica demonstrada theorico-practica para lo matemático y mercantil. Explicanse las monedas, pesos y medidas de los hebreos, griegos, romanos y de estos Reynos de España, conferidas entre sí*. Valencia: Jayme de Bordazar.
- DALMAU CARLES, J (1898). *Soluciones analíticas de los ejercicios y problemas contenidos en los libros «Aritmética razonada y nociones de Álgebra» y «Lecciones de Aritmética»*. Madrid: Librerías Hernando e Hijos de Pérez.
- FERNÁNDEZ Y CARDÍN, J. M. (1863). *Elementos de Matemáticas* (4.ª ed.). Madrid: Impreso por Gómez Fuentenebro.
- FISCHBEIN, E., DERI, M., NELLO, M. Y MARINO, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (1), 3-17.
- KIEREN, T. (1976) On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.). *Number and Measurement: Papers from a research workshop*. Columbus, OH: ERIC/SMEAC. pp. 101-144.
- HART, K. M. (1980). *Secondary school children's understanding of mathematics*. (Report of the Concepts in secondary Mathematics and Science Programme). London: University of London, Centre for science education.
- LACROIX, S. F. (1846). *Tratado elemental de Aritmética*. Madrid: Imprenta Nacional. Tomo 1. p. 70.
- LAMON, S. (1993). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. En T. Carpenter, E. Fenema y T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: an integration of research* (pp. 131-156). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

LAMON, S. (2001). Presenting and Representing. From Fractions to Rational Numbers. En *The Roles of Representation in Schol Mathematics*, 2001 Yearbok of the NCTM., edited by Albert A. Cuoco and Frances R. Curcio, pp. 146-165. Reston, VA: NCTM.

PÉREZ DE MOYA, J. (1562). *Arithmetica práctica y speculativa*. Salamanca. Biblioteca Castro. Madrid: Ediciones de la Fundación José Antonio de Castro. 1998.

PUIG, L. (2006). Vallejo Perplejo. En Maz, A., Rodríguez, M. y Romero, L., *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática*, (113-138). Servicio de Publicaciones, Universidad de Córdoba. Córdoba.

REY PASTOR, J. Y PUIG ADAM, P. (1932). *Elementos de Aritmética*. Col. Elemental intuitiva. Tomo I (Sexta Edición). Madrid: Imp. A. Marzo.

REY PASTOR, J. Y PUIG ADAM, P. (1936). *Matemáticas 4.º curso. Parte 1.ª: Aritmética* (2.ª Edición corregida). Madrid: Unión Poligráfica, SL.

REY PASTOR, J., PI CALLEJA, P. Y A. TREJO, C. (1957). *Análisis Matemático*. Vol. I. Buenos Aires: Kapesluz.

SINICROPE, R, W. MICK, H, R. KOLB, J, (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller & G. Bright (eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions*. 2002 Yearbook of the NCTM (pp. 153-155). Reston, VA: NCTM.

VALDES, J. Y SANTOS, J. J. (1975). *Matemáticas especiales COU. Plan 1975*. Madrid: Bruño.

VALLEJO, J. M. (1813). *Tratado Elemental de Matemáticas*. Escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid. Imp Garrayasaza. 1841.

VERGNAUD, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas (Primera edición en francés en 1981).