

In what sense the framework of conceptual fields can help us facilitate meaningful learning?

Gérard Vergnaud

gerard.vergnaud@univ-paris8.fr

*Conception, création, compétences et usages Laboratoire Paragraphe
Université Paris 8 2, rue de la Liberté. 93526 Saint-Denis Cedex*

Résumé

Un élève exprime ses connaissances scientifiques à la fois par sa manière d'agir en situation (forme opératoire), et par les énoncés et explications qu'il est capable d'exprimer (forme prédicative). Le sens est dans l'activité qu'il développe et pas seulement dans les formes linguistiques qu'il énonce. Le concept de situation didactique va donc de pair avec celui d'activité en situation, et plus précisément avec le concept de « schème ». Des conceptualisations importantes sont contenues dans les schèmes.

La perspective développementale héritée de Piaget et de Vygotski est une référence indispensable pour suivre et analyser sur le long terme et le moyen terme les filiations et les ruptures. Mais la place des contenus scientifiques et de leur épistémologie propre est plus importante que ce qu'avaient reconnu ces deux auteurs. Des exemples sont présentés, notamment celui des structures additives.

Mots-clés

Compétence, schème, champ conceptuel, conceptualisation, forme opératoire, forme prédicative, apprentissage, développement, filiation, rupture.

Resumen

Un alumno expresa sus conocimientos científicos a la vez por su manera de actuar en situación (forma operatoria), y por los enunciados y explicaciones que es capaz de expresar (forma predicativa). El sentido está en la actividad que desarrolla y no solamente en las formas lingüísticas que enuncia. El concepto de situación didáctica va a la par con el de actividad en situación, y más precisamente con el concepto de «esquema». Conceptualizaciones importantes están contenidas en los esquemas.

La perspectiva de desarrollo, heredada de Piaget y de Vygotski, es una referencia indispensable para seguir analizando, a largo y mediano plazo, las fi-

liaciones y rupturas. Pero el lugar de los contenidos científicos y sus epistemologías propias, es más importante que lo que han reconocidos estos dos autores. Se presentan ejemplos, particularmente, de estructuras aditivas.

Palabras-clave

Competencia, esquema, campo conceptual, conceptualización, forma operatoria, forma predicativa, aprendizaje, desarrollo, filiación, ruptura.

Abstract

A student expresses his scientific knowledge simultaneously for his way of acting in situation (operative form), and for the terms of reference and explanations that he is capable to communicate (predicative form). The sense is in the activity that he develops and not only in the linguistic forms that he enunciates. The concept of didactic situation goes in the lead with that of activity in situation, and more precisely with the concept of «scheme». Important conceptualizations are contained in the schemes.

The perspective of development, inherited from Piaget and from Vygotski, is an indispensable reference to continue analyzing, to long and medium term, the filiations and breaks. But the place of the scientific contents and its own epistemologies, it's more important than what these two authors have recognized. They present examples, particularly, of additive structures.

Keywords

Competition, scheme, conceptual field, conceptualization, operative form, pre-

dicative form, learning, development, affiliation, break.

Introduction

Pour Piaget, la connaissance est adaptation; et il ajoute assimilation et accommodation: assimilation du nouveau à l'ancien, et accommodation à ce qu'on n'a pas prévu à l'avance, pour tout dire à la contingence.

Nous avons aujourd'hui un bon exemple de contingence, puisque les traducteurs ne sont pas arrivés ; et aussi un bon exemple d'adaptation puisque c'est un collègue participant au colloque qui nous a prêté son concours pour commencer la conférence. Je le remercie chaleureusement d'avoir au pied levé accepté de traduire mon exposé.

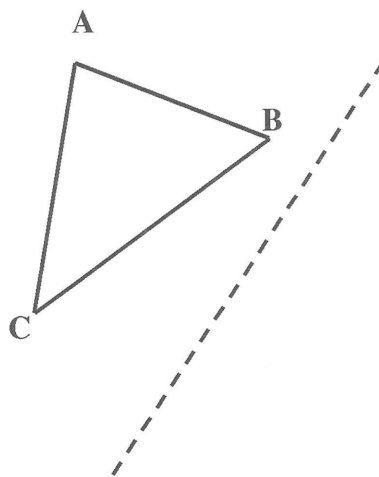
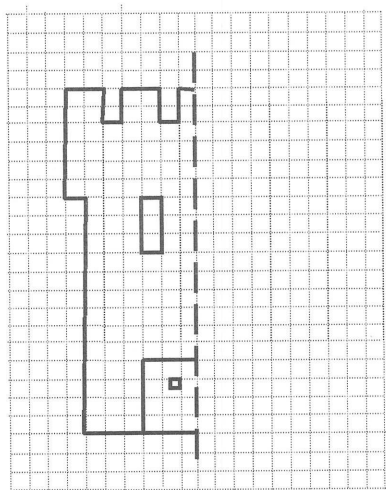
J'ai préparé ma thèse avec Piaget ; vous reconn trez aisément son héritage dans mes propos, même si j'ai passablement transformé et adapté ses idées, à la lumière de ma propre expérience. J'ai lu avec passion le livre de Vygotski «Pensée et langage» lorsqu'on me l'a communiqué en 1985 ? J'avais lu la traduction en anglais parue en 1982, mais cela ne m'avait pas impressionné autant que la traduction française de Françoise Sève, de 1985. La traduction anglaise était amputée de nombreuses parties de l'ouvrage, notamment de celles faisant référence au marxisme, et probablement je n'étais pas assez mûr, avec mon expérience d'alors, pour en tirer le meilleur profit. Piaget et Vygotski s'intéressent tous deux au développement et à la longue durée du développement ; leurs convergences sont grandes. Certes Piaget met en avant l'activité du sujet plutôt que la culture, mais il est parfaitement conscient du rôle de la culture dans le d -

veloppement cognitif de l'enfant. Vygotski met en avant le poids de la culture et les processus de médiation assurés par l'adulte en vue de l'appropriation de la culture par l'enfant, mais il est aussi l'un des pères de la théorie de l'activité; il donne aussi au langage et au symbolisme un rôle essentiel de médiation.

La médiation est un processus incontournable dans l'éducation ; encore faut-il analyser en quoi consistent les actes de médiation de l'enseignant, actes qui vont bien au-delà des actes de langage. Je dois ajouter que mon expérience de la recherche en didactique m'a permis de voir les choses différemment de Piaget, qui ne s'est pas intéressé aux connaissances scolaires, et de Vy-

gotski, lequel s'y est intéressé, mais sans entrer suffisamment dans l'analyse de leurs contenus conceptuels. La didactique le fait, et cela nous entraîne très loin.

Permettez-moi de présenter d'emblée la distinction entre **la forme opératoire de la connaissance**, celle qui permet de faire en situation (et de réussir éventuellement), **et la forme prédictive de la connaissance**, celle qui énonce les objets de pensée, leurs propriétés, leurs relations et leurs transformations. La science est faite de textes. C'est là une dimension essentielle, mais ces textes ne rendent qu'imparfaitement compte de la connaissance opératoire, qui est mise en oeuvre en situation.



Mais on peut en dire autant pour la forme prédictive de la connaissance. Voici quatre énoncés relatifs au champ conceptuel de la symétrie :

- 1 La forteresse est symétrique
- 2 Le triangle $A'B'C'$ est symétrique du triangle ABC par rapport à la droite d
- 3 La symétrie conserve les longueurs et les angles
- 4 La symétrie est une isométrie

Prenons l'exemple des deux situations ci-après, qui concernent toutes deux la symétrie orthogonale. Dans la première situation, qui peut être présentée à des enfants de 8 ou 9 ans, il s'agit de compléter la forteresse en dessinant à droite la partie symétrique de la demi-forteresse déjà dessinée. Les habiletés manuelles nécessaires ne sont pas négligeables : avec le crayon, partir du bon point, s'arrêter au bon point, dessiner le trait exactement au-dessus du trait du quadrillage ... Mais les connaissances proprement géométriques ne sont pas trop complexes, puisque tous les angles sont droits et que le quadrillage facilite grandement l'organisation de l'activité de l'élève : un pas à gauche sur la figure de droite, un pas à droite sur la figure de gauche ; deux pas en descendant sur la figure de gauche, deux pas en descendant sur celle de droite etc.

Dans la seconde situation, qui ne peut guère concerner les élèves avant l'âge de 12 ou 13 ans, le problème est beaucoup plus difficile puisqu'il faut utiliser les instruments de la géométrie, soit l'équerre graduée, soit la règle et le compas (dont les propriétés utilisées ici sont encore plus complexes que celles de l'équerre). On voit ainsi que la tâche « tracer le symétrique de... » peut présenter des difficultés contrastées en fonction de la figure et des instruments disponibles. Ainsi la forme opératoire de la connaissance se décline à des niveaux de développement très différents, en fonction notamment des connaissances nécessaires à l'action et à l'utilisation des instruments (axe de symétrie, propriétés des points homologues etc).

Dans les deux premiers énoncés, le concept de symétrie fonctionne comme un prédicat : à une place dans le premier énoncé, à trois places dans le second. Dans le troisième énoncé, ce qui était prédicat est devenu objet : la symétrie.

En outre ce nouvel objet de pensée à son tour a des propriétés : la conservation des longueurs et des angles ; Enfin le quatrième énoncé exprime une relation d'inclusion entre deux ensembles : les symétries et les isométries ; au passage le prédicat relatif à la conservation des longueurs et des angles du troisième énoncé est devenu un objet de pensée à son tour. On voit ainsi que les concepts se construisent en s'appuyant les uns sur les autres, et que le langage permet mieux que tout autre processus l'identification des objets ne correspondant directement à aucune perception. A l'appui du point de vue de Vygotski, on peut dire que la médiation par le langage est un processus incontournable dans l'enseignement des sciences. L'enseignant est irremplaçable. Mais cela ne signifie pas que son rôle se borne à mettre en mots le contenu conceptuel des connaissances.

Le premier acte de médiation de l'enseignant est en effet le choix de la situation à proposer aux élèves. Dans la zone de développement proximal, il existe des filiations et des ruptures. L'enseignant peut trouver opportun de jouer la filiation et de favoriser le glissement par l'élève d'une classe de situations à une autre, assez proche de la première pour que ce glissement se fasse aisément, voire spontanément ; mais il peut aussi trouver opportun de jouer la rupture, de manière à provoquer un déséquilibre entre la situation à traiter et les compétences des élèves, et à leur faire prendre conscience des limites de leur point de vue actuel.

Si on ne déstabilise pas les élèves, ils n'ont aucune raison d'apprendre. Il est vrai aussi que si on les déstabilise trop ils n'apprennent pas non plus. Le principe d'adaptation de Piaget fonctionne très bien ici ; de son côté, l'idée de proche développement de Vygotski incite à la prudence.

Qu'est-ce qui s'adapte ? Et à quoi ?

C'est bien entendu l'activité qui s'adapte, mais il faut un cadre théorique pour analyser l'activité ? C'est ce qui m'a conduit à reprendre et à développer le concept de schème, et à mieux définir ce à quoi un schème s'adresse : il s'adresse à des situations. Piaget, Vygotski ou Ausubel se sont intéressés à regarder comment et dans quelles conditions le sujet essaie de comprendre les objets et les phénomènes nouveaux, Mais ils n'ont pas su faire ressortir avec suffisamment de force le couple théorique schème/situation, qui est la pierre angulaire de la psychologie des compétences complexes et, à mon avis, de la didactique. Je reviendrai sur ce point plus loin, lorsque je définirai le concept de schème, mais je veux ajouter tout de suite que j'ai choisi d'étudier des champs conceptuels pour plusieurs raisons :

- on ne peut pas étudier le développement d'un concept tout seul, parce qu'il est toujours pris dans un ensemble qui forme système ;
- la conceptualisation est un processus qui fait partie de l'activité, et il faut donc saisir les conceptualisations à l'œuvre dans les schèmes, qu'elles soient explicites ou implicites ; c'est ce qui m'a conduit à donner autant d'importance au concept d'invariant opératoire ;
- dans une perspective développementale, un concept est donc un triplet de trois ensembles : un ensemble de situations, un ensemble d'invariants opératoires, un ensemble de formes langagières et symboliques.

Sans schèmes et sans situations, on ne peut pas comprendre le développement de la pensée. Dans la même situation de la vie, y compris de la vie scolaire ou de la vie professionnelle, se développent des compétences dans plusieurs registres : les gestes, les connaissances et compétences scientifiques et techniques, l'interaction avec autrui, les compétences langagières, les compétences affectives. Même si on choisit de s'intéresser à un seul registre, on sait que les autres registres de l'activité peuvent jouer un grand rôle. Les chefs d'entreprises par exemple sont parfois surpris qu'on leur parle des compétences affectives, et pourtant beaucoup d'exemples montrent, non seulement leur importance dans les relations entre personnes, mais aussi leurs effets sur l'efficacité de l'activité. Par exemple les jeunes ingénieurs du département de conception des lanceurs spatiaux, à l'Aérospatiale, à qui on demandait d'exprimer les qualités principales des experts auxquels ils étaient amenés à demander conseil, mettaient presque toujours en avant leur capacité plus ou moins grande d'écoute et d'attention, leur possibilité de se mettre à la place des jeunes ingénieurs ; et cela avant même leur compétence d'expert.

Comme exemples de schèmes, de manière à montrer la généralité du concept, je mentionnerai un schème qui concerne les enfants jeunes, le schème du dénombrement, et un schème qui concerne des professionnels adultes, la taille de la vigne. L'organisation de l'activité de l'enfant dans le dénombrement est relativement facile à décrire : un, deux, trois, quatre, quatre ! son organisation repose sur deux concepts mathématiques, qui restent totalement implicites :

- celui de correspondance biunivoque, entre les objets à dénombrer, les gestes du bras et de la main, les

gestes de la voix, et les gestes du regard, lesquels assurent justement le caractère exhaustif et exclusif du dénombrement. Cette activité organisée du regard est souvent ce qui fait défaut aux enfants qui souffrent de handicaps,

- celui de cardinal, qui prend la forme de la répétition du dernier mot-nombre, quatre !, dans l'exemple ci-dessus.

Il faut savoir qu'il existe une certaine indépendance entre ces deux concepts, puisque l'on trouve des enfants qui ne se trompent pas dans la correspondance entre les trois registres de gestes, mais qui ne cardinalisent pas, et des enfants qui cardinalisent mais dont les gestes qui jalonnent l'activité ne sont pas bien coordonnés (ils vont trop vite ou trop lentement dans un registre). Cela me conduit à souligner que le développement des compétences n'obéit pas à un ordre total, mais seulement à un ordre partiel, non connexe.

La taille de la vigne est hautement symbolique en France compte tenu de notre amour du vin.

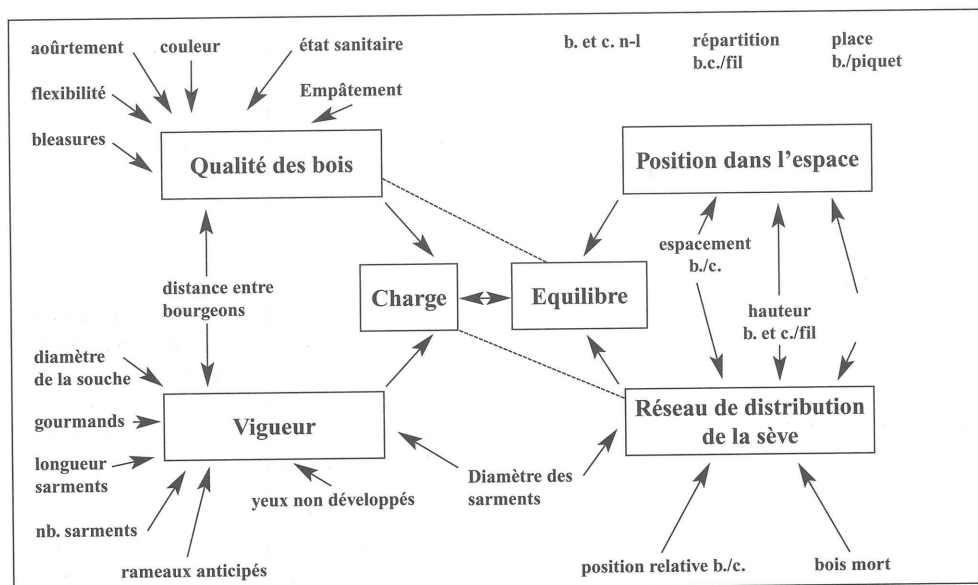
Le travail de recherche et d'analyse de Sylvie Caens Martin est remarquable. Il fallait observer et interroger des tailleurs, mettre en évidence les catégorisations effectuées implicitement au cours de l'activité : des distinctions importantes fonctionnent, entre ceps droits et ceps crochus, entre coursons bien placés et coursons mal placés, entre charpente légère et charpente forte. Ces distinctions sont fonctionnelles en raison des problèmes de montée de la sève, d'encombrement possible entre rangs et entre pieds de vigne, entre possibilités d'évolution dans l'année et au-delà. Mais où se situe la limite entre pied droit et pied crochu, entre coursons plus ou

moins bien placés, entre charpente légère ou forte ? En outre le tailleur de vigne interprète ce qu'il voit comme le résultat de la taille de l'année précédente, voire des deux années précédentes, et il anticipe aussi les effets à un ou deux ans de la taille qu'il effectue actuellement, notamment dans le cas où il essaie de remédier à des défauts du pied qu'il est en train de tailler. La vigne est une plante acrotonique, qui se développe par les extrémités, et très rapidement. Il faut quinze ans pour que la vigne donne son meilleur vin ; le tailleur peut tailler jusqu'à 800 pieds dans la journée. J'en ai dit assez pour que vous compreniez l'importance cruciale de la taille.

Mais qu'en est-il de la conceptualisation ? Sylvie Caens Martin a pu dresser une carte des concepts impliqués dans la taille de la vigne.

Les deux invariants opératoires qui sous-tendent l'activité du tailleur de vigne sont ceux de charge et d'équilibre : « charge » pour cette idée que le sarmant ne doit pas supporter plus d'une grappe et demie en moyenne, « équilibre » pour cette autre idée que le cep doit se développer dans plusieurs plans et directions, sans empiéter sur les rangs et les ceps voisins. Ce statut particulier des concepts-en-acte, qui sont formulés dans les communications entre tailleurs, conduit à parler de « concepts pragmatiques » à la suite de Pastré.

Tous les invariants opératoires ne deviennent pas des concepts pragmatiques, puisqu'ils ne sont pas tous formulés et adoptés par la communauté professionnelle qui les utilise. Mais tous se forment largement dans l'expérience, laquelle apporte une contribution incontournable au développement. Cela ne signifie pas que l'expérience soit à elle seule suffisante : la formation continue contribue aussi au dévelop-



pement, notamment par la mise en mots de l'expérience, par la prise de conscience métacognitive, par les apports de connaissances nouvelles ; la formation initiale elle-même apporte aux futurs professionnels des catégories et des opérations de pensée qui leur permettent de lire leur expérience d'une manière plus efficace.

La question de la compétence et des schèmes organisateurs de l'activité

Les entreprises, aujourd'hui, sont très préoccupées par la question des compétences : comment les détecter, comment les développer ? Dans cette idée de compétence il faut voir une idée de relation d'ordre ; voici quelques définitions, complémentaires les unes des autres, et destinées à spécifier le concept, en le rapportant à une classe de situations :

1. A est plus compétent que B s'il sait faire quelque chose que B ne sait pas faire. A plus compétent au temps t' qu'au temps t s'il sait faire ce qu'il ne savait pas faire
2. A est plus compétent s'il s'y prend d'une meilleure manière
3. A est plus compétent s'il dispose d'un répertoire de ressources alternatives qui lui permettent d'adapter sa conduite aux différents cas de figure qui peuvent se présenter
4. A est plus compétent s'il est moins démuni devant une situation nouvelle

Ce concept de compétence est très important dans le travail, notamment la dernière définition, pour la raison que les hommes et les femmes sont de plus en plus confrontés à la résolution de problèmes. C'est d'ailleurs une idée valable pour l'éducation également. Mais l'idée de résolution de problème n'a pas de sens à elle seule, et on ne doit pas l'op-

poser à celle de connaissance : en effet, sans connaissances, on n'a pas de moyens de faire face aux situations nouvelles; d'une manière analogue, on peut dire que le concept de compétence n'est pas un concept scientifique à lui tout seul ; il faut lui ajouter celui d'activité, et il faut des concepts théoriques pour analyser l'activité ? C'est le rôle que je donne au concept de schème .

Le concept de schème vient de Kant, mais celui-ci en réservait l'emploi aux questions d'espace et de temps. Au début du 20^{ème} siècle, les philosophes néo-kantiens, comme Revault d'Allonnes en élargissent le sens, mais en s'appuyant surtout sur la perception, et même sur l'aperception, c'est-à-dire sur une prise d'information rapide, mais suffisante pour que soit opérée une identification (il donne l'exemple d'une jolie femme qui passe). Il va ainsi pénétrer un peu dans le contenu conceptuel des situations et des objets quotidiens, et ne pas s'en tenir à l'espace et au temps. C'est Piaget qui, à mes yeux, fait le passage décisif dans la direction de l'activité : c'est en effet en étudiant l'activité des bébés, les gestes nécessaires pour coordonner les mouvements des deux mains et de l'œil, en fonction du but recherché, qu'il saisit la rationalité progressivement construite de l'activité gestuelle. On peut souligner au passage que, dans la même période, il montre que le bébé construit le concept d'objet invariant, à travers le changement de perspective, et la disparition derrière un écran. Cette idée sera reprise plus tard par Piaget, pour la conservation des quantités discrètes et des quantités continues. Dans un univers en perpétuel changement, il faut bien identifier des objets et des propriétés qui restent stables : d'où le concept d'invariant opératoire, auquel j'ai donné un sens très général, et une place plus large que Piaget ne le faisait. C'est très important pour

l'étude de l'apprentissage des mathématiques et des sciences, puisque la science en effet cherche à comprendre les transformations du réel, en considérant systématiquement ce qui varie et ce qui ne varie pas, et dans quelles conditions. Comme il nous faut pour cela identifier ce qui, dans l'activité, correspond à une fonction de conceptualisation, j'ai redéfini le concept de schème de manière plus rigoureuse et plus analytique, sans m'écarter je pense des idées que Piaget avait en tête.

1. Un schème est une totalité dynamique fonctionnelle

2. Un schème est une organisation invariante de l'activité pour une classe définie de situations

3. Un schème comprend nécessairement quatre catégories de composantes:

- un but (ou plusieurs), des sous-buts et des anticipations
- des règles d'action, de prise d'information et de contrôle
- des invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte)
- des possibilités d'inférence

4. Un schème est une fonction qui prend ses valeurs d'entrée dans un espace temporalisé à n dimensions, et ses valeurs de sortie dans un espace également temporalisé à n' dimensions (n et n' très grands)

La première définition correspond assez bien au contenu de la réflexion de Piaget, puisque celui-ci faisait du schème une forme dynamique, proche de ce que les gestaltistes avaient reconnu

pour la perception. La seconde définition va un peu plus loin, et elle m'a été suggérée par le concept d'algorithme : une règle qui permet de traiter tout problème d'une classe définie à l'avance, soit en aboutissant à une solution en un nombre fini de pas, soit en montrant qu'il n'a pas de solution. Les algorithmes sont des schèmes, mais les schèmes ne sont pas tous des algorithmes. J'ajoute le commentaire que c'est l'organisation de l'activité qui est invariante, non pas l'activité ; le schème n'est pas un stéréotype. En outre le schème s'adresse à une classe de situations ; c'est donc un universel, même si cette classe de situations est petite, comme c'est le cas dans les premiers moments de compréhension d'un champ conceptuel nouveau.

La troisième définition est analytique, et va plus loin que ce que Piaget, Vygotski, Bruner ont pu écrire, de même qu'elle ajoute beaucoup à ce que Newell et Simon ont pu penser à l'époque des premières recherches sur la simulation de la pensée. L'activité, ce n'est pas seulement l'action, mais aussi l'identification de buts et de sous-buts, ainsi que des prises d'information et des contrôles, qui sont engendrés au fur et à mesure du déroulement de l'activité. Il est étrange que la prise d'information ait été si mal théorisée, alors que c'est un des points essentiels des activités complexes : dans la conduite de véhicules et de machines, dans la lecture etc. Comme il faut des catégories pour prendre l'information, et sélectionner ce qui est pertinent, les concepts-en-acte sont au cœur de l'organisation des schèmes ; et les théorèmes-en-acte sont le moyen d'inférer, la plupart du temps de manière totalement implicite, les buts et les règles opportuns. Il faut donc des possibilités d'inférence hic et nunc : elle permettent l'adaptation de l'activité à la situation présente. Il n'y a pas au fond d'activité totalement

automatique, qui fonctionnerait sans contrôle et sans adaptation aux propriétés particulières de la situation ; sauf peut-être pour des segments très petits de l'activité. L'idée de « conduite câblée » est, avec le behaviorisme, l'une des pires sottises de la psychologie cognitive d'une certaine époque.

La formulation de ma théorie est marquée par le fait qu'elle est née dans le domaine des compétences mathématiques, et l'on m'a parfois reproché l'expression « théorème-en-acte ». Aussi je pense utile de préciser qu'un théorème-en-acte est tout simplement une « proposition tenue pour vraie sur le réel ».

Concernant la quatrième définition, je ne sais pas aujourd'hui lui donner un contenu concret ; je la conserve néanmoins, parce qu'elle exprime bien l'idée qu'il s'agit d'une fonction complexe, et qu'elle est susceptible d'alimenter des recherches à venir sur la simulation de l'activité en situation, par les roboticiens par exemple.

Exemples de filiations et de ruptures

La théorie des champs conceptuels concerne le développement de la connaissance. J'ai donc choisi de vous montrer quelques exemples de filiations et de ruptures.

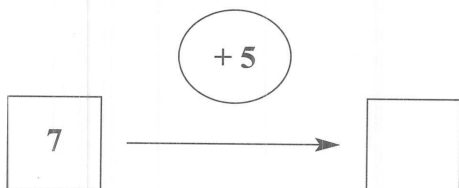
Considérons les trois problèmes suivants qui sont tous trois résolus par la même opération numérique : $7 + 5$ ou $5 + 7$:

Pierre avait 7 billes. Il en gagne 5. Combien en a-t-il maintenant ?

Robert vient de perdre 5 billes; Il en a maintenant 7. Combien en avait-il avant de jouer?

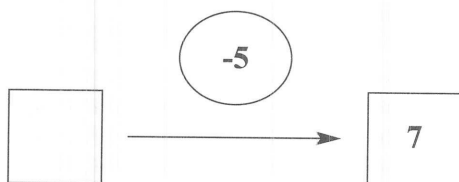
Thierry vient de jouer deux parties de billes. Il ne se souvient plus de ce qui s'est pass   la première partie. A la seconde partie il a perdu 7 billes. En faisant ses comptes, il s'aperçoit que, en tout, il a gagn   5 billes. Que s'est-il pass   la première partie ?

Les deux schémas ci-dessous permettent de bien saisir la différence entre les deux premiers problèmes, Pierre et Robert.



Le problème Pierre correspond à l'un des deux cas prototypiques de l'addition. On connaît l'état initial et la transformation, et on cherche l'état final. L'autre cas prototypique est la réunion de deux parties en un tout).

Le problème Pierre n'est pas prototypique : on ne connaît pas l'état initial et, pour le calculer, il faut appliquer à l'état final la transformation inverse de la transformation directe.



Le premier problème « Pierre » est résolu par la quasi totalité des enfants à la fin de la première année de l' cole élémentaire, tandis que le second « Robert » n'est réussi qu'un an et demi plus tard en moyenne. Le raisonnement canonique relève alors d'un théorème-en-acte qui n'était pas nécessaire pour le problème « Pierre ».

si $F = T(I)$ alors $I = T^{-1}(F)$

La distinction entre concept-en-acte et théorème-en-acte est très importante puisque les concepts sont les mêmes dans le problème « Pierre » et dans le problème « Robert » :  tat et transformation, état initial et état final. C'est un théorème-en-acte qui fait la différence. Comme la relation entre concepts et théorèmes est dialectique (il n'y a pas de théorème sans concepts, et pas de concept sans théorèmes), la tentation est grande de ne pas les distinguer, comme c'est le cas dans la théorie des réseaux sémantiques, et dans certains exemples de cartes conceptuelles.

La réussite décalée entre le problème « Pierre » et le problème « Robert » représente une petite rupture. Avec le problème Thierry, on a à faire à une grande rupture, puisqu'il n'est réussi que par une très petite minorité d'élèves à la fin de l' cole primaire et au début de l' cole secondaire. Le choix de l'addition est contre-intuitif pour la quasi-totalité des élèves, et même pour beaucoup d'adultes.

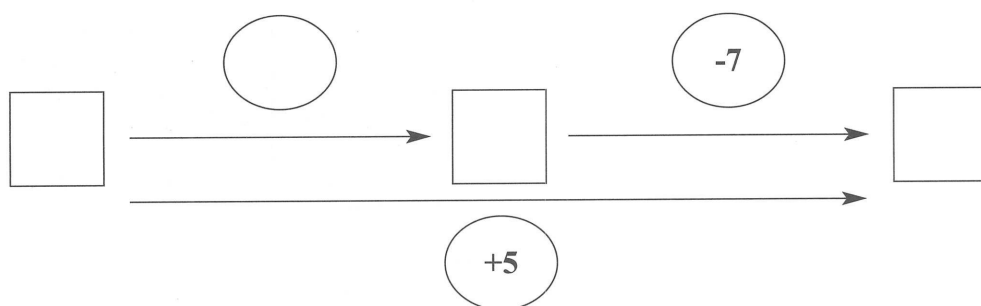
On a à faire cette fois à la composition de deux transformations, et il faut décomposer $+5$ en deux transformations de signes contraires, l'inconnue et -7 .

Les personnes interrogées invoquent alors la difficulté de l'énoncé, et aussi le fait qu'on ne connaît pas l'état initial. Je vais donc montrer que le même énoncé est compris assez facilement lorsque les valeurs numériques utilisées permettent d'éviter le problème de la d combinaison d'une transformation en deux transformations de signes contraires.

Prenons les quatre cas suivants :

A Gagné 7 gagné 15

Thierry vient de jouer deux parties de billes. Il ne se souvient plus de ce qui s'est



passé à la première partie. A la seconde partie il a **gagné 7 billes**. En faisant ses comptes, il s'aperçoit que, en tout, il a **gagné 15 billes**. Que s'est-il passé à la première partie ?

B Perdu 7 perdu 15

Thierry vient de jouer deux parties de billes. Il ne se souvient plus de ce qui s'est passé à la première partie. A la seconde partie il a **perdu 7 billes**. En faisant ses comptes, il s'aperçoit que, en tout, il a **perdu 15 billes**. Que s'est-il passé à la première partie ?

C Gagné 15 gagné 7

Thierry vient de jouer deux parties de billes. Il ne se souvient plus de ce qui s'est passé à la première partie. A la seconde partie il a **gagné 15 billes**. En faisant ses comptes, il s'aperçoit que, en tout, il a **gagné 7 billes**. Que s'est-il passé à la première partie ?

D Perdu 7 gagné 15

Thierry vient de jouer deux parties de billes. Il ne se souvient plus de ce qui s'est passé à la première partie. A la seconde partie il a **perdu 7 billes**. En faisant ses comptes, il s'aperçoit que, en tout, il a **gagné 15 billes**. Que s'est-il passé à la première partie ?

A la fin de l'école élémentaire, les deux problèmes A et B sont résolus sans grande difficulté : par glissement de sens, les élèves les interprètent comme des problèmes partie/partie/tout : le tout et la partie sont de même signe, le tout est plus grand que la partie. Les élèves se ramènent ainsi à un cas plus élémentaire.

Le problème C est un peu plus délicat, parce que le tout est plus petit que la partie. Mais les élèves opèrent un autre glissement de sens, à savoir que « gagné 15 billes » est considéré comme un état initial et « gagné 7 billes » comme un état final. Il n'est pas trop difficile, alors, de rechercher la transformation négative qui fait passer de l'état initial à l'état final, par différence entre 15 et 7.

Par contre le problème D ne permet pas de glissement de sens analogue. Il faut donc des conceptualisations supplémentaires : soit une relation dans l'ensemble des nombres relatifs, soit un raisonnement sur hypothèse, implicite ou explicite, permettant de se représenter qu'il a fallu gagner, à la première partie, à la fois les billes gagnées en tout et celles perdues à la seconde partie.

Ainsi le choix des valeurs numériques transforme un problème relativement trivial en un problème difficile.

Le champ conceptuel des structures additives

C'est en raisonnant sur un grand nombre de cas qu'il est possible de saisir le champ conceptuel des structures additives. Je le présente comme un ensemble de six relations de base, qui peuvent se décliner en un grand nombre de problèmes-types, lesquels demandent des invariants opératoires différents, sur lesquels je n'ai pas le temps de m'expliquer ici. A ces relations correspond un ensemble de concepts, dont beaucoup restent ignorés par les enseignants, voire par les mathématiciens. Le poids du numérique est tel, en mathématiques, qu'on ne prend pas la mesure des calculs relationnels nécessaires pour choisir les opérations numériques et les données pertinentes, d'autant que ces calculs restent le plus souvent totalement implicites. Pourtant ce serait une erreur de réduire l'apprentissage de l'arithmétique aux quatre opérations et au concept de nombre.

Le tableau page suivante résume les relations qui, par combinaisons, permettent d'engendrer la totalité des problèmes d'addition et de soustraction.

Dans l'ensemble des classes de problèmes, on peut identifier les filiations « heureuses », celles qui permettent aux élèves de s'appuyer sur leurs connaissances antérieures et de progresser un peu dans la complexité (on est alors dans la zone de développement proximal la plus accessible), et celles qui sont des « ruptures », et qui appellent la déstabilisation des élèves : on est alors

dans une zone de développement proximal moins accessible, pour laquelle le travail de médiation de l'enseignant est plus important et plus complexe.

Quantités discrètes et continues, mesure,

partie - tout,

état - transformation,

comparaison référé - référent

composition binaire (de mesures, de transformations, de relations)

opération unaire et fonction

inversion

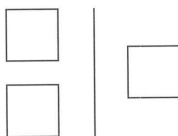
nombre naturel - nombre relatif

position - abscisse - valeur algébrique

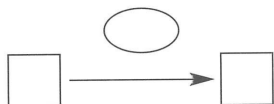
On sait que, jusqu'au milieu du 19^{ème} siècle, le nombre négatif n'a pas été accepté comme un vrai nombre par une partie des mathématiciens, mais seulement comme un moyen commode de calcul algébrique. Les résistances des élèves à l'égard des calculs avec des nombres négatifs et à l'égard des solutions négatives des équations ne sont donc pas surprenantes : elles s'expliquent principalement par le fait que le nombre est d'abord une mesure, que les mesures sont positives, et qu'on n'introduit pas assez vite les raisonnements sur les relations et les transformations qui, elles, peuvent être effectivement positives ou négatives.

SIX RELATIONS ADDITIVES

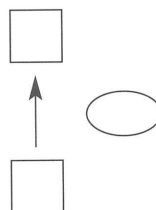
partie / partie / tout



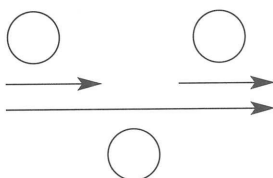
état / transformation / état



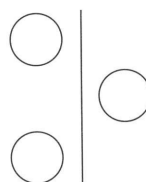
comparaison



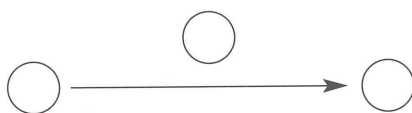
composition de transformations
relations



composition de



transformation d'une relation



Concepts organisateurs des structures additives

Les relations de Chasles sont un autre exemple de relations additives, qui permettent de montrer le contraste entre un cas de figure relativement intuitif et un cas contre-intuitif.

RELATIONS DE CHASLES

$$\overline{AB} = \text{abs}(B) - \text{abs}(A) \quad \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

Exemple trivial



Exemple contre-intuitif



Le champ conceptuel des structures multiplicatives

Des concepts supplémentaires sont évidemment indispensables pour comprendre la difficulté relative des classes de problèmes susceptibles d'être rencontrées, et les raisonnements corrects ou erronés susceptibles d'être faits par les élèves. Je n'ai pas les moyens ici d'en faire une analyse. Voici simplement une liste possible des concepts supplémentaires indispensables :

grandeur, scalaire, rapport et proportion

fonction et variable, fonction linéaire, bilinéaire, n-linéaire

coefficient constant

nombre rationnel

analyse dimensionnelle

espace vectoriel ; combinaison linéaire

dépendance, indépendance

Je me contenterai de souligner le rôle essentiel des concepts de fonction et de variable, notamment ceux de fonction linéaire, bilinéaire, et n-linéaire.

Pour ces concepts, les représentations symboliques (tableaux, graphiques et formules algébriques) sont une aide précieuse, et l'on voit bien alors que la formulation des relations et leur représentation enrichissent la conceptualisation. Même si le concept, ce n'est pas seulement « la signification des mots », comme Vygotski a eu tendance à l'affirmer dans toute une partie de son ouvrage « Pensée et langage », il est vrai que l'énonciation, la mise en mots, la mise en symboles graphiques, jouent un rôle important, voire décisif dans les processus de conceptualisation.

Les physiciens le savent bien puisqu'ils consacrent beaucoup d'efforts à l'élaboration de formules. Mais les formules ne sont pas le point final de la conceptualisation, puisqu'il faut en faire une lecture adéquate, et que cela aussi demande des opérations de pensée.

Prenons l'exemple de la formule du volume du prisme droit :

$$V = Sh$$

On peut se servir de cette formule pour calculer le volume du prisme connaissant l'aire de base S et la hauteur. C'est l'utilisation directe.

On peut aussi s'en servir pour calculer la hauteur connaissant le volume et l'aire de base, ou encore l'aire de base connaissant le volume et la hauteur. C'est l'utilisation inverse, ce qui est déjà un peu plus difficile pour les élèves.

Mais on peut aussi lire dans la formule que le volume est proportionnel à l'aire de base quand la hauteur est tenue constante, et à la hauteur quand l'aire de base est tenue constante. C'est même la raison fondamentale de la formule puisqu'elle exprime une fonction de deux variables indépendantes. Pourtant cette lecture n'est pas présentée dans les manuels français (  une exception près).

On peut enfin se servir de la formule pour comprendre les relations entre unités et les changements d'unités : facteur 10 sur les longueurs, facteur 102 sur les aires, facteur 103 sur les volumes. On sait que c'est très difficile pour les élèves.

Les problèmes de conceptualisation ne sont donc pas totalement réglés par les formules.

Parmi les actes de médiation des enseignants, figurent bien entendu les accompagnements par le langage des activités des élèves dans le déroulement de leur activité, et donc dans le processus d'élaboration de leurs schèmes (buts, sous-buts, anticipations, sélection de l'information et formulation de certaines relations, guidage des règles d'action et de contrôle, des inférences etc). Mais il ne faut pas oublier que le choix des situations est le premier acte de médiation de l'enseignant, et que les formules, qui résument les savoirs de la discipline, et qu'il faut donc retenir, relèvent de la culture apportée et négociée par l'enseignant. Sauf rarissime exception, une formule ne peut pas être découverte par les élèves.

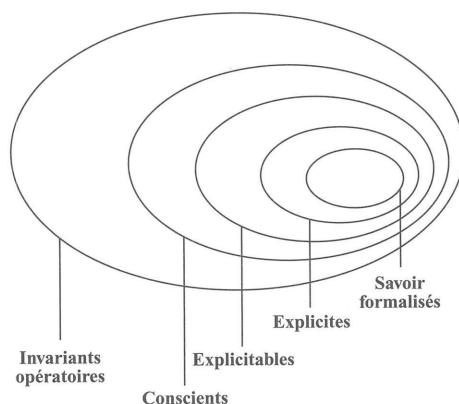
Un dernier schéma va me permettre de considérer les rapports entre les invariants opératoires et les concepts, théorèmes et principes qui constituent les textes scientifiques.

La conceptualisation peut être définie comme l'identification des objets du monde, de leurs propriétés, relations et transformations, que cette identification soit directe ou quasi-directe, ou qu'elle résulte d'une construction. Le constructivisme ne concerne pas que le développement des individus, mais aussi celui de la culture, notamment de la culture scientifique. La science ne peut pas être réduite à la lecture des régularités de l'univers ; bien au contraire, les constructions des savants supposent des prises de conscience exceptionnelles, des dialogues et des confrontations avec les autres membres de la communauté, des élaborations imaginaires souvent personnelles, qui ne sont pas partagées immédiatement par la communauté, même si ces élaborations s'appuient sur celles des autres.

Le diagramme ci-dessus met en évidence le fait que les connaissances formalisées ne forment qu'une partie des connaissances explicites dans l'activité, lesquelles ne sont elles-mêmes qu'un sous-ensemble des connaissances explicites : on sait en effet qu'il faut parfois une forme d'activité particulière pour que soient énoncées les relations des objets entre eux et avec les opérations du sujet ; c'est une des fonctions du « debriefing » par exemple en psychologie du travail et en didactique professionnelle.

Mais c'est l'observation de l'activité en situation qui permet de détecter les concepts-en-acte et les théorèmes-en-acte ; ils sont éventuellement conscients pour le sujet, éventuellement inconscients. C'est ce qui justifie le concept d'invariant opératoire, même si les concepts et théorèmes formalisés aussi sont opératoires.

L'explicitation n'épuise pas la conscience, et la conscience elle-même n'épuise pas la conceptualisation opérée par les invariants opératoires.



Bibliographie choisie (surtout Espagnol, Anglais, Portugais)

OUVRAGES

VERGNAUD G.(Ed) (1991) *Les sciences cognitives en débat*. Première école d'été du CNRS sur les sciences cognitives. Paris, Editions du CNRS.

VERGNAUD G. (1991) *El Nino las Matematicas y la Realidad*. Mexico, Trillas.

LAUTREY J., VERGNAUD G. (Eds) (1997). *Piaget aujourd'hui*. Psychologie Française, 42-1

VERGNAUD G. LEV VYGOTSKI , Pedagogia e Pensador do Nosso Tempo. Porto Alegre ; Geempa, 2004.

CHAPITRES DE LIVRES

VERGNAUD G., HALBWACHS F., ROUCHIER A. (1981). Estructura de la materia enseñada, historia de las ciencias, y desarrollo conceptual del alumno. in Coll C (Ed.), *Psicología genética y educación*, Oikos-tau-Barcelona, pp.115-128.

VERGNAUD G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems, in Carpenter T.P., Moser J.M., Romberg T.A. (Eds). *Addition and Subtraction: a cognitive perspective*, Hillsdale NJ, Lawrence Erlbaum, 39-59.

VERGNAUD G. (1983). Actividad y conocimiento operatorio. In Coll. C. (Ed.) *Psicología genética y aprendizajes escolares*, Madrid, Siglo XXI de España Editores, pp. 91-104.

VERGNAUD G., DURAND C. (1983). Estructuras aditivas y complejidad psicogenética. In Coll. C. (Ed.). *Psicología genética y aprendizajes escolares*. Madrid, Siglo XXI de España Editores, pp. 105-128.

VERGNAUD G. (1983). Multiplicative Structures. In Lesh R., Landau M. (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*, Academic Press, pp. 127-174.

VERGNAUD G. (1986). A tentative conclusion. In Janvier C. (Ed.). *Problems of representation in teaching and learning mathematics*. Hillsdale NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 227-232.

VERGNAUD G. et al. (1990) Epistemology and psychology of mathematics education. In J. Kilpatrick & P. Nesher (Eds). *Mathematics and cognition*. Cambridge, Cambridge University Press, pp 2-17.

WEIL BARAIS A., VERGNAUD G.(1990) Students' conceptions in physics and mathematics Biases and helps. In J.P. Caverni, J-M. Fabre, M. Gonzalez (Eds). *Cognitive biases*. North Holland, Elsevier Science Publishers, pp 69-84.

VERGNAUD G. (1994) Multiplicative Conceptual Field. What and Why. in G. Harel and J. Confrey (Eds). *The Development of Multiplicative Reasoning in the learning of Mathematics*. Albany State, University of New York Press.

VERGNAUD G. (1996) The theory of conceptual fields.in L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin, B. Greer (Eds) *Theories of Mathematical Learning*. Mahwah, Lawrence Erlbaum Ass.

VERGNAUD G. (1996) Au fond de l'action, la conceptualisation. In J-M. Barbier (Ed). *Savoirs théoriques et savoirs d'action*. Paris, Presses Universitaires de France.

VERGNAUD G. (1997) The nature of mathematical concepts in T. Nunes, P. Bryant (Eds) *Learning and Teaching Mathematics; An International Perspective*. Hove (East Sussex), Psychology Press Ltd.

VERGNAUD G. (1998) Towards a cognitive theory of practice. In A. Sierpinski, J. Kilpatrick (Eds) *Mathematics Education as a research domain : A Search for Identity*. Kluwer Academic Publishers.

ARTICLES DE REVUE

VERGNAUD G. (1979). The acquisition of arithmetical concepts. *Educational studies in Mathematics*, 10, pp. 263-274.

VERGNAUD G. (1982). Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education: some theoretical and methodological issues. *For the learning of Mathematics*, 3, 2, pp. 31-41.

VERGNAUD G. (1983). Psychology and didactics of Mathematics in France: an overview. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 2, pp. 59-63.

VERGNAUD G., RICCO G. (1986). Didáctica y adquisición de conceptos matemáticos. Problemas y Métodos. *Revista Argentina de Educación*, 4, pp. 67-92.

VERGNAUD G. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. In *Análise Psicológica*, 1 (V): pp. 75-90.

VERGNAUD G. (1996) Some of Piaget's fundamental ideas concerning didactics, *Prospects*, 26-1, 183-194.

VERGNAUD G. (1996) Education the best portion of Piaget's heritage. *Swiss Journal of Psychology*, 55-2/3, 112-118.

VERGNAUD G. (1999) A comprehensive Theory of Representation for Mathema-

tics Education. *Journal of Mathematical Behavior* (Número spécial sur la représentation), 17, 2, 167-181.

VERGNAUD G., RECOPE M. (2000) De Revault d'Allonnes à une théorie du schème aujourd'hui. *Psychologie française* (La Société Française de Psychologie a cent ans), 45, 1, 35-50.

COMMUNICATIONS

VERGNAUD G. (1987). About constructivism. *Proceedings of the twelfth Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Montréal, pp. 42-54. (invited plenary address).

VERGNAUD G. (1988) Theoretical frameworks and empirical facts in the psychology of mathematics education. Plenary address. In A. Hirst & K. Hirst (Eds.) *Proceedings of the Sixth International Congress on Mathematical Education*, Budapest, Janos Bolyai Mathematical Society, Conférence plénière, pp 29-47.

CORTES A., VERGNAUD G., KAVAFIAN N. (1990) From Arithmetic to Algebra : negotiating a Jump in the learning process. *Proceedings of the 14th PME Conference*, 2, pp 27-34.

VERGNAUD G. (1988) Psicología cognitiva y del desarrollo y didácticas de las matemáticas. In F. Huarte *Temas actuales sobre psicopedagogía y didáctica*. 2º congreso mundial vasco.

VERGNAUD G. (1989). Problem-solving and concept-formation in the learning of mathematics. In H. Mandl, E. De Corte, H. Bennett, H. Friedrich (eds.) *Learning and Instruction*, Oxford Pergamon Press, Conférence plénière, 399-413.

VERGNAUD G. (1995) Teoria dos campos conceituais. In L. Nasser. *Anais do 1º seminário internacional de Educação*

matematica do Rio de Janeiro. Rio, juillet 1993, pp.1-26.

VERGNAUD G. (1995) In what sense is research on mathematics education useful to teachers. *Proceedings of the second pan hellenic congress on mathematics Education, Cyprus, avril 1995*, pp.21-39.

VERGNAUD G. (1996) Important cognitive changes in the learning of mathe-

tics. A developmental perspective. In *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education* (Sevilla, 14/21 juillet 1996). SAEM Thales, p 412.

VERGNAUD G. (1997) Algebra, Additive and Multiplicative Structures. Is there any coherence at the early secondary level? In *ERCME (European Research Conference on Mathematical Education)* , Podebrady, pp 33-45.