

El paso de la aritmética al álgebra en la educación secundaria obligatoria

Eduardo Lacasta Zabalza, Elena Gómez Madoz y Miguel Rodríguez Wilhelmi
Universidad Pública Navarra

Resumen

Las nociones, métodos y significados propios del álgebra se introducen en España en primer curso de Educación Secundaria Obligatoria. En este trabajo analizamos el currículo actual y sus consecuencias. Asimismo, justificamos la necesidad de búsqueda de medios más eficaces para la enseñanza del Álgebra.

Palabras clave

Aritmética, álgebra, enseñanza secundaria, ingeniería didáctica.

Abstract

The algebraic notions, methods and meanings are introduced in Spain in first course of Obligatory Secondary Education. In this work we analyze the current curriculum and their consequences. Also, we justify the necessity of search of more effective means for the teaching of the Algebra.

Key words

Arithmetic, algebra, secondary education, didactical engineering.

Introducción

En la actualidad, en España, el Álgebra se introduce en el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Antes de esta introducción, los contenidos oficiales de la asignatura de matemáticas de 1.º de la ESO incluyen, entre otros, una colección de tópicos aritméticos que suponen una revisión y profundización de los contenidos matemáticos propios de la Educación Primaria.

Los contenidos aritméticos sirven para motivar la introducción de la noción de ecuación y la resolución de ecuaciones de primer grado con coeficientes sencillos. El método de enseñanza mayoritario de estos primeros objetos propios del álgebra es como una aritmética generalizada.

«Con el álgebra logramos un dominio más general de los números. Los simbolizamos con letras y operamos con ellas como si fueran números, estableciendo equilibrios (...) Cuando se quiere operar con un número aún desconocido o cuando se desea utilizar un número cualquiera en lugar de uno concreto se suelen tomar las letras como sustitutivos de los números.» (Colera et al., 1996, pp.116-119).

La descripción dada por Colera et al. (1996) busca facilitar el ingreso al álgebra por medio de los conocimientos previos de los estudiantes, a saber, conocimientos aritméticos. El álgebra toma muchos símbolos y propiedades de la aritmética, lo que facilita a los estudiantes un acceso bastante rápido a expresiones algebraicas sencillas. Pero esto puede llevarles a dotar a los símbolos del mismo significado que tenían en aritmética y a interpretar, por ejemplo las letras, como simples sustitutos de un número fijo que hay que encontrar, o el signo igual como una secuencia de expresiones iguales sin alcanzar a darle otros sentidos.

Este enfoque mayoritario de los libros de texto (de plantear la enseñanza del álgebra como una aritmética generalizada) se ve acentuado por la necesidad institucional de llegar a estudiantes con muy distintos niveles de conocimiento en un tiempo limitado. De esta forma, este enfoque se plantea como el camino más rápido para hacer llegar al estudiante unos conocimientos mínimos a pesar de las posibles dificultades ulteriores al avanzar en el estudio del álgebra. Sin embargo, parece necesario diseñar instrumentos que permitan evaluar los conocimientos de los estudiantes tanto a corto, como a medio y largo plazo¹.

¹ La LOE propone una evaluación de diagnóstico como medio para valorar el aprendizaje a largo plazo e, indirectamente, si la significación de los aprendizajes (si éstos pasan o no a constituir parte del bagaje matemático de los estudiantes): «Al finalizar el segundo curso de la educación secundaria obligatoria todos los centros realizarán una evaluación de diagnóstico de las competencias básicas alcanzadas por sus alumnos. Esta evaluación será competencia de las Administraciones educativas y tendrá carácter formativo y orientador para los centros e informativo para las familias y para el conjunto de la comunidad educativa. Estas evaluaciones tendrán como marco de referencia las evaluaciones generales de diagnóstico que se establecen en el Artículo 144.1 de esta Ley (LOE Capítulo 3. Artículo 29).

Un planteamiento alternativo a la enseñanza del álgebra como una aritmética generalizada no está exento de dificultades.

«Queda abierto un problema didáctico fundamental: el estudio de las condiciones en que sería posible una enseñanza funcional del lenguaje algebraico dentro de los actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas (...) Las experiencias de este tipo de enseñanza son muy escasas. Es previsible que su implantación provocase consecuencias de mayor alcance que un simple cambio curricular, llegando a afectar la estructura y las funciones del sistema de enseñanza de las matemáticas en su totalidad.» (Gascón, 1993, p. 229).

Preguntas, hipótesis y método

La observación de las prácticas docentes, de los manuales de texto y de las directrices curriculares nos ha permitido comprobar que, de forma mayoritaria, el álgebra es presentada al alumno como una aritmética generalizada.

P1: ¿Cuál es la razón que lleva a impartir la materia con esta orientación?

P2: ¿Qué implicaciones tiene esta decisión en el proceso de estudio del Álgebra en la ESO?

Hipótesis:

H1: La introducción del álgebra como una aritmética generalizada es un instrumento útil y económico a corto plazo en los sistemas educativos.

H2: Esta forma de acceder al álgebra es costosa a largo plazo dado que difi-

culta el acceso a un álgebra más avanzada.

H3: Institucionalmente se evita la resolución de problemas que signifiquen un verdadero envite epistemológico con la obra «Álgebra», en particular la *modelización algebraica*. La aritmética generalizada se sustenta en la enseñanza de resolución de tareas mediante técnicas que resuelven el tipo de problemas restringidos que se plantean.

Para contrastar estas hipótesis nos basamos en la ingeniería didáctica. La ingeniería didáctica es singular no por los objetivos de las investigaciones, sino por las características de su funcionamiento metodológico. Un proceso de ingeniería comporta cuatro fases:

Fase 1: Los análisis preliminares. Análisis de los contenidos matemáticos, de la enseñanza tradicional y sus efectos, de las concepciones de los estudiantes y de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución; etc. Todo ello, por supuesto, teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación.

Fase 2: La concepción y el análisis a priori. Este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*.

Fase 3: Experimentación. En esta fase se buscan datos medibles que identifiquemos por medio de *observables* (Lacasta et al., 2005) y que permiten contrastar las hipótesis planteadas en el análisis *a priori*. Esta experimentación puede conformarse por medio de pruebas y observaciones en el aula, escritos de los alumnos, grabaciones audiovisuales, documentos curriculares, libros, etc.

Fase 4: Análisis a posteriori y evaluación. En la confrontación de los dos análisis, *a priori* y *a posteriori*, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

La ingeniería didáctica no comporta un ciclo cerrado, sino un proceso cíclico en la que cada fase aporta información para la interpretación o confección de las otras, dentro de un proyecto global de investigación. En nuestro caso, este proyecto global ha tenido como resultado el Trabajo de Investigación Tutelado (TIT), conducente al Diploma de Estudios Avanzados (DEA), titulado *El paso de la aritmética al álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria*, elaborado por Madoz (2006). En este trabajo presentaremos los aspectos más relevantes de cara a la investigación, resaltando el carácter «recursivo» de toda investigación didáctica.

Noción de igualdad y análisis de una prueba experimental

El análisis previo sobre la enseñanza actual (esbozado en la introducción) ha sido complementado con un análisis de los contenidos matemáticos (*dimensión epistemológica*) y una observación clínica sobre las realizaciones de un grupo de estudiantes (*dimensión cognitiva*).

Dimensión epistemológica

El análisis de los contenidos se ha fundamentado en un trabajo previo (Wilhelmi et al., en prensa). En dicho trabajo hemos analizado la noción de igualdad desde, en particular, los puntos de vista aritmético y algebraico, observando las implicaciones que las definiciones asociadas a dichos contextos tienen sobre los objetos matemáticos

involucrados. En concreto, hemos determinado las principales nociones, propiedades, lenguaje, argumentos y acciones utilizados en una clase amplia de problemas prototípicos en dichos contextos de uso:

- Las nociones fundamentales asociadas a la noción de igualdad son: en el aritmético, identidad y relación de orden; en el algebraico, equivalencia y función (en la mayoría de los casos, de tipo algebraico).
- En el contexto aritmético el lenguaje matemático está poco formalizado. El discurso se apoya en la manipulación de valores concretos y la argumentación se basa en propiedades de simetría y transitividad de la igualdad. En el contexto algebraico los objetos se representan mediante un lenguaje simbólico-literal, cuyo objetivo es generalizar las operaciones concretas, construir un sistema de signos fácilmente reconocible y establecer una estructura operativa y discursiva que permita reducir a expresiones canónicas los objetos matemáticos.
- Las proposiciones aritméticas básicas resaltan algunas de las propiedades fundamentales de los números reales dotados de las operaciones binarias suma y producto. En muchas ocasiones se modelizan estas proposiciones aritméticas mediante álgebra, en este sentido, las proposiciones algebraicas generalizan a las aritméticas y constituyen una justificación explícita de las mismas.
- En los contextos aritmético y algebraico un problema fundamental es la obtención de representantes canónicos y, para resolver este problema, la acción característica es la manipulación de objetos mediante equivalencias (que quedan justificadas por los axiomas de los núme-

ros reales o por propiedades previamente establecidas).

- Estas consideraciones determinan una distinción radical entre el uso del signo igual, que permite justificar algunas de las dificultades prototípicas en la introducción del álgebra (observación unidireccional de las identidades matemáticas; dicotomía parámetro-variable; nociones de ecuación, identidad, relación y función; etc.)

Dimensión cognitiva

Analizamos las resoluciones de tres problemas planteados a alumnos de 2.º de la ESO, después de haber asistido a clase de las correspondientes unidades didácticas de álgebra tanto de 1.º como de 2.º. Los alumnos no presentan en su mayoría dificultades especiales en la asignatura de matemáticas, aunque se observa una «resistencia» a usar el álgebra.

Los problemas analizados fueron organizados en orden creciente de «algebrización», esto es, según avanzamos la resolución es más compleja de abordar sin utilizar métodos algebraicos. Los problemas son:

- 1) Entre Sheila y Raquel reúnen 840 euros. Sabiendo que Sheila tiene 125 euros más que Raquel, calcular los euros que tienen cada una.
- 2) Entre Santi, Alex y Diego reúnen 300 euros. Sabiendo que Alex tiene 16 euros más que Santi y Diego 28 más que Alex. ¿Cuánto tienen cada uno?
- 3) Entre María y Olga tienen 490 euros. Deciden hacer una donación para ayudar a los afectados por el Tsunami de forma que María pone la mitad de lo que tiene y Olga la tercera parte. Entre las dos hacen una

donación de 205 euros. ¿Cuánto dinero tenía cada una?

Debido a circunstancias de aula y de programación, los problemas se propusieron en días distintos. Se informó explícitamente a los estudiantes de que no importaba el método de resolución elegido. El análisis clínico de las respuestas

nos ha permitido observar dos grupos de estudiantes: uno, el más numeroso, formado por aquellos alumnos que abordan los problemas de manera algebraica; otro, más reducido, formado por aquellos alumnos que utilizan preferentemente métodos aritméticos (o ambos, como medio de control de los resultados que producen, Figura 1).

$$\begin{aligned}
 x + y + z &= 300 \\
 y &= x + 16 \\
 z &= 28 + 16 + x \\
 x + (x + 16) + (28 + 16 + x) &= 300 \\
 x + x + x &= 300 - 16 - 28 - 16 \\
 3x &= 240 \\
 x &= 240 / 3 \\
 x &= 80 \\
 x + 16 &\rightarrow 80 + 16 = 96 \\
 x + 16 + 28 &\rightarrow 80 + 16 + 28 = 124 \\
 124 + 96 + 80 &= 300
 \end{aligned}$$

Santi = 80 €
 Alex = 96 €
 Diego = 124 €

$$\begin{array}{r}
 300 \\
 -16 \\
 \hline
 284 \\
 -28 \\
 \hline
 256 \\
 -16 \\
 \hline
 240
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 240 \quad 12 \\
 \underline{0} \quad 80
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 96 \\
 +28 \\
 \hline
 124
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 124 \\
 +96 \\
 +80 \\
 \hline
 300
 \end{array}$$

Figura 1. Resolución del problema 2 por métodos algebraicos y aritméticos.

La decisión sobre el método de resolución no se realiza de una vez. Algunos alumnos intentan un método aritmético, desisten de él, inician el planteamiento

de una ecuación y la abandonan, abordan nuevamente el problema por otro procedimiento aritmético (Figura 2).

~~300 € - 16 € = 284 €~~
~~x + 16 = Alex~~
~~x + 16 + 28 = Diego~~

$x + 16 + 28 = x$

$131 + 103 + 87 \Rightarrow 321$

$125 + 97 + 81 \Rightarrow 303$

$126 + 98 + 82 \Rightarrow 306$

$127 + 99 + 83 \Rightarrow 309$

$134 + 96 + 80 \Rightarrow 310$

$124 + 96 + 80 \Rightarrow 300$

Diego	Alex	Santi
124 €	96 €	80 €

Figura 2. Búsqueda de una resolución del problema 2 por métodos algebraicos y aritméticos.

En cada uno de los grupos se han identificado errores de diversos tipos, que pueden ser explicados en términos de la enseñanza que los alumnos han recibido: a) *planteamiento en las ecuaciones* (que no se ajustan al enunciado del problema), de lo que se deduce que la enseñanza no ha resultado totalmente eficaz en el paso del lenguaje natural al lenguaje algebraico; b) *operaciones con expresiones algebraicas*, necesidad de mejora en la eficacia de manipulación de expresiones algebraicas y, en particular, en los procedimientos de resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita; c) *operaciones aritméticas*, en muchos casos, la maestría de los estudiantes se restringe al conjunto de los números naturales «no excesivamente grandes»; d) *transcripción de valores numéricos*, que denotan falta de actitud hacia las matemáticas o de concentración.

Prueba experimental

Los análisis previos realizados (de la enseñanza actual, de los contenidos matemáticos y de las dificultades, errores y conocimientos de los alumnos) nos han permitido diferenciar, con relación a los fenómenos didácticos relativos a la enseñanza del álgebra elemental, entre las dificultades cuyo origen es el uso inadecuado de propiedades aritméticas y aquellas que tienen un origen «relativamente independiente de la aritmética» y que determinan una especificidad con el álgebra. Según estos criterios, elaboramos un cuestionario con seis problemas, ordenados de forma creciente según la dificultad de resolverlos por métodos exclusivamente aritméticos. Los problemas son:

1) ¿Cuál es el número que al aumentarlo en 23 unidades da 47?

2) Encuentra dos números consecutivos que sumen 27. (El consecutivo de un número es el siguiente a dicho número. Por ejemplo: 5 es el consecutivo de 4).

3) Mateo ha quedado primero en un concurso y su amigo Miguel segundo. Como premio se reparten 169 caramelos de forma que a Mateo le tocan 25 caramelos más que a Miguel. ¿Cuántos caramelos le tocaron a cada uno?

4) Un padre hace un trato con su hijo para darle la paga. Le pone 16 problemas de matemáticas y quedan en que le dará 1 € por cada problema bien resuelto y le quitará 0,5 € por cada uno que no haga bien. Al final el chico recibe una paga de 5,5 €. ¿Cuántos hizo bien y cuántos mal?

5) Entre María y Olga tienen 490 €. Deciden hacer una donación para ayudar a una ONG. en una causa humanitaria. María pone la mitad de lo que tiene y Olga la tercera parte. Entre las dos hacen una donación de 205€. ¿Cuánto dinero tenían inicialmente cada una?

6) La madre de Ana tiene el triple de edad que ella y dentro de 14 años tendrá el doble de la edad que tenga entonces Ana. Calcula la edad actual de cada una.

Analizamos las resoluciones de una muestra de 42 alumnos de 1.º de ESO, después de haber asistido a clase de las correspondientes unidades didácticas de álgebra en la asignatura de matemáticas. Al igual que en la sección 3, se explicita a los alumnos que pueden resolver los problemas por el procedimiento (aritmético o algebraico) que consideren oportuno. Los problemas se plantean después de dos meses de haber sido in-

Introducidos los contenidos algebraicos. El análisis de las respuestas de los alumnos (Tabla 1) muestra la preferencia mayoritaria por los métodos aritméticos.

Algunos estudiantes resuelven los primeros problemas por métodos aritméticos y también por métodos algebraicos. La resolución aritmética juega un papel cognitivo fundamental, mientras que la resolución algebraica cumple una función «mostrativa» de las capacidades del estudiante, al profeso². Los métodos algebraicos utilizados son en

su totalidad «prototípicos»: se ajustan al tipo de manipulaciones y reglas enseñadas explícitamente. Sin embargo, los métodos aritméticos no siempre están formalizados, sino que en ocasiones suponen un procedimiento de ensayo-error, operaciones mentales no explícitas, ajustes o aproximaciones.

El resultado más notable consiste en la falta generalizada de maestría en la resolución algebraica de los problemas y en la tendencia a afrontar los problemas por métodos exclusivamente aritméticos.

Tabla 1. *Método de resolución de los problemas*

Problema	Método				
	Algebraico		Aritmético		Nada
	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	
1	4	1	33	4	0
2	1	1	36	3	1
3	1	0	9	30	2
4	0	0	4	33	9
5	0	1	0	29	12
6	0	9	0	17	16

El sistema educativo observado: consecuencias y propuestas

El análisis de las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica nos ha per-

mitido explicar el comportamiento de los estudiantes según la enseñanza recibida y analizar las prácticas educativas observadas³. Algunas de estas explicaciones son:

² En el momento de la evaluación, la relación profesor-alumno está muy marcada por regla implícita que determina la necesidad por parte de los alumnos de «mostrar los conocimientos» al profesor, esto es, no se trata únicamente de resolver el problema, sino también de convencer al profesor de la maestría en la asignatura. Esta relación es de tipo pedagógico, puesto que es extrapolable a cualquier asignatura.

³ Las cuestiones que aquí describiremos no se siguen exclusivamente de la prueba experimental descrita en la sección 4. Son el resultado del análisis didáctico «global» en el marco del DEA (Madoz, 2006) y obedecen al criterio «recursivo» apuntado al principio de este trabajo; a saber: observación y descripción de la realidad con base a la experiencia matemático-didáctica, construcción de un modelo o conjunto de modelos del sistema didáctico, elección de los observables (Lacasta et al., 2005), prueba de la contingencia, contraste del modelo, resultados, discusión de los resultados y propuesta de un nuevo modelo, etc.

1. *Presentación de los métodos de resolución.* Los procedimientos de resolución de problemas se muestran como objetos «acabados» y no se discute su fiabilidad, eficacia o alcance. Los problemas planteados son prototípicos, ajustados a los métodos, y, por lo tanto, representan «meras aplicaciones mecánicas».

2. *Atomización de las técnicas.* Los procedimientos se presentan de forma aislada, con la ingenua premisa de que la «eficacia en el manejo simbólico aislado posibilitará su maestría en situaciones complejas». Un ejemplo es la introducción y desarrollo de operaciones con expresiones algebraicas, introduciendo ejercicios del tipo:

«Opera y reduce:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (-4) \cdot (3x) & \text{b)} (5x) \cdot (-x) \\ \text{c)} \left(\frac{2}{3}x\right) \cdot (3x) & \text{d)} (2x) : (2x) \\ \text{e)} (3x) : (6x) & \text{f)} (8x^2) \cdot (4x) \end{array}$$

Reduce:

$$\begin{array}{l} \text{a)} } 3(x+1) - 2(x-1) \\ \text{b)} } 5x(2x+3) - 3x(1-x) \end{array}$$

(Colera et al., 1996, p.124)

Las técnicas de manipulación algebraica no aparecen como un medio de control y de eficacia en situaciones problemáticas, sino que son un objetivo aislado y desarticulado del resto del currículo (resolución de problemas, interpretación de problemas geométricos).

3. *Problemas en contextos pseudo-aritméticos:* Se plantean problemas aritméticos en los que sólo hay que poner alguna letra en lugar de los números y operar igual. En muchos casos el estudiante es capaz de resolver el problema de forma aritmética. Esto genera en muchos estudiantes una clara resistencia a usar el álgebra, ya que no en-

cuentran una necesidad matemática por su uso.

«El par de zapatillas deportivas de algunas marcas cuestan 105 euros, y de éstos, 0,35 euros son para la persona que las fabrica en Indonesia. ¿Cuántos pares de zapatillas debería hacer esta persona para poder comprar unas de la marca para la que trabaja?» (Argüello et al., 2002, p. 103)

4. *Presentación de técnicas heurísticas normalizadas,* sobre las cuales se presupone un «poder heurístico global».

- (1) Leer detenidamente el enunciado.
 - (2) Identificar lo conocido (los datos) y lo desconocido (la incógnita).
 - (3) Expresar el enunciado en lenguaje algebraico, mediante una ecuación.
 - (4) Resolver la ecuación.
 - (5) Comprobar el resultado obtenido.
- (Anzola et al., 2000, p. 107)

Establece la ilusión de que estos pasos «garantizan el éxito en la resolución de problemas» y no se aborda la cuestión crucial de cómo llevar a cabo «el plan propuesto».

5. *Dicotomía incógnita / datos,* en contra del método cartesiano⁴. Esta distinción «irrefutable» determina en muchos casos una heurística (ver los pasos del método de resolución de problemas planteado por Anzola et al. (2000) en la sección anterior).

6. *Interpretación unidireccional de las funciones:* Es destacable la interpreta-

⁴ El método cartesiano sugiere tratar todas las variables de la misma forma, a saber, «como si fueran conocidas». Este hecho facilita la introducción de las nociones de variabilidad y de relación entre variables.

ción que se da a las expresiones algebraicas como «máquinas».

«Una expresión algebraica es como una máquina. Se le “echa” un número y, a partir de él, “fabrica” un valor numérico. Se le “echa” otro número y “fabrica” otro valor numérico.» (Anzola et al., 2000, p. 111)

Asimismo, esta interpretación de la función como máquina favorece la dicotomía incógnita / datos, señalada.

7. *No se aborda la variabilidad:* Debido a la interpretación de las letras como sustitutivos de números no se aborda la variabilidad y se interpreta que cada letra se puede considerar como un único número fijo que debemos encontrar. De hecho, por ejemplo, apenas se explora la posibilidad del análisis de figuras geométricas según las relaciones entre perímetro, área, volumen... Casi como único ejemplo encontramos:

«Dibuja un rectángulo y llama x a la longitud en centímetros de la base e y a la longitud en centímetros de la altura.

- Calcula la expresión algebraica que define su perímetro.
- Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y complétala:

Base	x	5 cm	6,25 cm	10,16 cm	8/5 cm
Altura	y	3 cm	4,8 cm	2,7 cm	4/6 cm
Perímetro					

(Argüello et al., 2002, p. 97)

8. *Escasa distinción entre ecuación e igualdad.* De todos los libros de texto consultados, únicamente en uno de ellos se distingue entre igualdad, identidad y ecuación.

«Una igualdad está formada por dos expresiones matemáticas separadas

por un signo igual (=). Es numérica si sólo aparecen números.

$5+2 = 7 \rightarrow$ verdadera; $5+2=8 \rightarrow$ falsa.

Es algebraica si aparecen números y letras: $10 + x = 13$ (...)

Una identidad es una igualdad algebraica cierta para cualquier valor de las letras. Ejemplos:

$$x + x = 2x$$

$$\text{Si } x = 1 \rightarrow 1 + 1 = 2 \cdot 1 \rightarrow 2 = 2$$

$$a + b = b + a$$

$$\text{Si } a = 2 \text{ y } b = 1 \rightarrow 2 + 1 = 1 + 2 \rightarrow 3 = 3$$

Una ecuación es una igualdad algebraica que sólo es cierta para determinados valores de las letras.

Ejemplo:

$$x + 3 = 10 \rightarrow \text{Sólo es cierta para } x = 7;$$

$$7 + 3 = 10 \text{» (Morillo, 2004).}$$

9. *Regla de tres y proporcionalidad:* Para resolver problemas de proporcionalidad se utiliza como herramienta la regla de tres. Este procedimiento es introducido en Primaria para abordar problemas «de porcentajes» y «de proporcionalidad».

«Los problemas de proporcionalidad se pueden resolver por regla de tres o por reducción a la unidad» (Hernández y Jiménez, 1999).

A la vista del análisis del sistema educativo observado es natural intentar progresar en una enseñanza que permita controlar los efectos adversos descritos. De hecho, el objetivo último de la didáctica de las matemáticas es el de mejorar la transmisión de conocimientos y de los saberes matemáticos. Basándonos en los resultados del estudio realizado construimos un «instrumento» aplicable que responda a ciertas cuestiones. Se puede plantear una *pregunta profesional* del tipo: ¿cómo podría un docente realizar una enseñanza que facilitara a los estudiantes la transición de la aritmética al álgebra? Desde el punto de vista de la didáctica esta pregunta es reformulada, según dos dimensiones:

i) *Dimensión explicativa.* ¿Qué procesos de estudio matemático podrían ser propuestos (en la institución «Secundaria Obligatoria») para identificar y describir de manera más adecuada los hechos y fenómenos didácticos que se «producen» en situaciones de construcción y comunicación en la transición de la aritmética al álgebra?

ii) *Dimensión normativa o técnica.* ¿Qué características debe poseer un «instrumento» para que los estudiantes utilicen las estrategias de base y evolucionen a partir de éstas hacia el saber a enseñar en la transición de la aritmética al álgebra?

La ingeniería didáctica permite la articulación de estas dos últimas preguntas. El estudio mostrado ha permitido la confección de una propuesta de ingeniería en el marco de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1997). La *pertinencia* de esta ingeniería se debe argumentar sobre los resultados del análisis previo. Asimismo es necesario vigilar su *adecuación cognitiva* (relativa a los conocimientos de los estudiantes), *epistemológica* (relativa a los contenidos matemáticos), *instruccional* (relativa al papel del profesor) y *curricular* (relativa al primer ciclo de la ESO). El desarrollo de esta propuesta de enseñanza excede la intención de este trabajo.

Conclusiones y cuestiones abiertas

Las conclusiones que aquí enunciaremos no buscan refutar o validar las hipótesis, sino únicamente confrontarlas, apoyar alguno de sus aspectos o analizar con mayor agudeza implicaciones de los mismos o, en definitiva, mostrar un conocimiento novedoso sobre el funcionamiento del sistema didáctico objeto de estudio. De hecho,

en general, la formulación de las hipótesis no debe conllevar «la ilusión de que ellas serán refutadas o definitivamente establecidas, sino solamente puestas en duda o confrontadas» (Gras, 1992).

1. La enseñanza del álgebra como una aritmética generalizada plantea las siguientes restricciones:

Institucionales

1.1. El tiempo que los currículos dedican al álgebra, limita la eficiencia y la adecuación del enfoque utilizado.

1.2. La distinción de las nociones de función lineal y afín no se aclara en algunos textos escolares.

1.3. El conocimiento de la regla de tres que los estudiantes tienen de su etapa de primaria se convierte en obstáculo para el aprendizaje de las nociones de proporcionalidad y función lineal.

Cognitivas

1.4. La introducción del álgebra acentúa la dificultad propia de la heterogeneidad de los estudiantes impuesta por el carácter unitario de la ESO.

2. Se distinguen dos intervalos de tiempo didácticos en las intervenciones a realizar en los procesos de enseñanza-aprendizaje: uno, *plazo largo*, referido a intervenciones concretas en aula, no más allá de un curso e, incluso, de una «unidad didáctica» del currículo; y otro, *plazo corto*, referido a proyectos de enseñanza de tipo global, en los que se establece la necesidad de realizar conexiones entre praxeologías asociadas a uno o varios objetos matemáticos. Esta distinción se concreta en el paso de la aritmética al álgebra en:

Corto plazo

2.1. La introducción del álgebra en la ESO en España se realiza apoyán-

dose en las tareas, técnicas y tecnologías introducidas en la enseñanza de la aritmética. De esta forma se logra, a corto plazo, un acceso a expresiones algebraicas sencillas que minimiza el tiempo dedicado.

2.2. La solución institucional es de tipo «pragmática a corto plazo»: enseñanza programada con ejercicios para la rutinización de técnicas estereotipadas, sin abordar cuestiones de eficacia o ámbito de aplicabilidad.

2.3. No se abordan cuestiones fundamentales de modelización matemática ni situaciones de enseñanza para la introducción y desarrollo del método cartesiano.

Largo plazo

2.4. Institucionalmente no se evalúa la pertinencia o no de la enseñanza del álgebra como aritmética generalizada y la influencia de esta enseñanza en el proyecto global de enseñanza, únicamente se analiza si se ha logrado la consecución de unos

objetivos mínimos de tipo conceptual, procedimental y actitudinal con relación a la unidad didáctica álgebra.

2.5. La enseñanza actual no permite valorar lo que el alumno aprende a largo plazo.

3. Las restricciones observadas y la constatación de la existencia de dos intervalos de tiempo (plazo largo y plazo corto) nos ha conducido a iniciar una propuesta tomando en consideración todo el análisis realizado.

Cuestiones abiertas:

- Contraste y validación de la propuesta.
- Explicitar las praxeologías didáctica y matemática que permitan controlar el funcionamiento del sistema didáctico en la experimentación de la propuesta.
- Necesidad de diseñar un instrumento que permita contrastar los aprendizajes logrados por los alumnos a largo plazo.

Dirección de contacto:

Eduardo Lacasta Zabalza, Elena Gómez Madoz y Miguel Rodríguez Wilhelmi
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Matemática e Informática
Universidad Pública de Navarra
Campus de Arrosadía
31006 Pamplona (Navarra)
E-mail: elacasta@unavarra.es, elenagomezmadoc@hotmail.com, miguelr.wilhelmi@unavarra.es

Referencias

- ANZOLA, M. Y VIZMANOS, J. R. (2000). *Aritmos 2001, matemáticas, 1.º ESO, 1er ciclo*. Madrid: Ediciones SM.
- ARGÜELLO RAMOS, M.ª J., ARROYO SAN MIGUEL, J. C., DEL RÍO GARCÍA, T., VIDAL SILVA, M.ª D. (2002). *(Mat)¹ Matemáticas E.S.O.: curso 1.º*. Zaragoza: Luis Vives.
- ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L., GÓMEZ, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica.
- BROUSSEAU, G. (1998). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques, 1970-1990*. (Translated into English and edited by Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R., & Warfield, V.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- COLERA J., GAZTELU I., GUZMAN M. DE (1996). *Matemáticas 1.º E.S.O.* Madrid: Anaya.
- GASCÓN J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13(3), 295-332.
- GRAS, R. (1992). L'analyse des données: une méthodologie de traitement de questions de didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 295-332.
- HERNÁNDEZ PÉREZ-MUÑOZ, M.ª L. Y JIMÉNEZ GARCÍA, E. (1999). *Matemáticas 6.º de primaria*. Zaragoza: Luis Vives.
- LACASTA E., PASCUAL J. R., WILHEMI M. R., MADDOZ E. G. (en prensa). Analyse «a priori» par rapport à une théorie: détermination des observables pour l'analyse des données empiriques. Le cas de la fonction continue en mathématiques. *Colloque international «Didactique: quelles références épistémologiques?»* Bordeaux: IUFM d'Aquitane.
- MADDOZ, E. G. (2006). *El paso de la aritmética al álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria. Memoria del DEA*. Pamplona: Universidad Pública Navarra.
- MORILLO, F. (2004). *Refuerzo matemáticas 1.º E.S.O.* Madrid: Santillana.
- WILHEMI M. R., GODINO J. D., LACASTA, E. (en prensa). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.