

Investigación e innovación matemática. Un ejemplo: El puzzle algebraico

*Eligia Domínguez Santana, Josefa Hernández Domínguez,
María Muñoz Pérez, María Mercedes Palarea Medina,
Raquel Ruano Barrera y Martín M. Socas Robayna
Universidad de La Laguna*

Resumen

En este artículo vamos a ilustrar el trabajo realizado en los últimos años, conjugando la innovación y la investigación en la enseñanza de las matemáticas a través del análisis de la intervención didáctica en el aula, con un material didáctico «puzzle algebraico» y el estudio del origen de errores en el proceso de adquisición del lenguaje algebraico.

Presentaremos una experiencia realizada con alumnos de 2.º de ESO en la que se estudia los números enteros y las expresiones algebraicas utilizando el «puzzle algebraico», como un registro analógico de los contenidos matemáticos citados. La metodología utilizada para la recogida de información sobre las producciones de los alumnos ha sido de carácter cualitativo y cuantitativo, lo que nos ha permitido clasificar los errores cometidos por los alumnos.

Expondremos, también, las conclusiones generales que se derivan de estos trabajos, así como las distintas implicaciones didácticas de carácter curricular y de investigación que se han generado.

Palabras clave

Investigación, innovación, enseñanza secundaria, lenguaje algebraico, material didáctico: Puzzle algebraico.

Abstract

In this paper the work carried out in the last years is shown, bringing together the innovation and the research in mathematics education through the analysis of the didactic intervention in the classroom with a didactic material «algebraic puzzle» and the study of the errors origin in the process of acquisition of the algebraic language.

We present an experience carried out with students of 2.º ESO in which there are studied the integer numbers and the algebraic expressions using the «algebraic puzzle», as an analogical register of the mathematical topics mentioned. To collect information about student productions we have used both qualitative and quantitative methods, which has allowed us to classify the errors of the students.

We also expose the general conclusions stemmed from these works, as well as, the didactic implications both curricular and from investigation that have been generated.

Key words

Investigation, Innovation, secondary education, algebraic language, didactic material «algebraic puzzle».

Introducción

En este trabajo (1) describimos diferentes temas de innovación y de investigación en la enseñanza de las matemáticas que hemos desarrollado en los últimos años (2000/06), tomando en consideración una etapa educativa: Educación Secundaria, un tipo de estudio: dificultades y errores en la adquisición del lenguaje algebraico y el análisis de los errores, y un material didáctico «puzzle algebraico», entendido como una representación semiótica para el Lenguaje algebraico.

El trabajo se estructura del siguiente modo: Puzzle algebraico, experiencias de innovación e investigación, ejemplificación, origen de los errores, implicaciones curriculares e implicaciones en la investigación.

Los objetivos de este trabajo son:

- Presentar una visión global del trabajo realizado en los últimos años. En particular:

- Analizar las elaboraciones de una alumna estudiando la evolución de las producciones obtenidas en el pre y postest y en la entrevista.
- Reflexionar sobre este análisis para comprobar las conjeturas respecto a la clasificación de los orígenes de los errores.
- Presentar una nueva propuesta de intervención en el aula con el material didáctico «puzzle algebraico»
- Valorar el proceso de enseñanza aprendizaje con la nueva propuesta de intervención.

El Puzzle algebraico

El Puzzle Algebraico está formado por 132 fichas que se distribuyen en 13 piezas de diferentes colores (azul claro y azul oscuro), dimensiones y signos. El puzzle es una representación semiótica de carácter bidimensional no paradigmática basada en la noción de magnitud orientada, que permite abordar el tratamiento de los siguientes objetos matemáticos: cantidades numéricas positivas y negativas, expresiones algebraicas elementales, ecuaciones lineales, ecuaciones de segundo grado y sistemas de ecuaciones e inecuaciones (Socas, 2000).

Aunque se trata de una representación semiótica no paradigmática, respeta el principio de extensión algebraica, especialmente con la regla de los paréntesis, en la que aparece accionada a dos ideas: la resta como acción de quitar (formación de ceros, ceros relativos,...) y la resta como suma del opuesto. Además, también respeta la regla de los signos y en consecuencia permite la formación de rectángulos. El puzzle está hecho para que respete el álgebra geométrica griega, es decir, para que se puedan resolver hasta ecuaciones de 2.º grado.

¹ Este trabajo ha sido financiado, en parte, por la D. G. I. Plan Nacional I + D + I: «La resolución de problemas de Matemáticas en la Educación postobligatoria haciendo uso de herramientas tecnológicas: Problemas de aprendizaje y métodos de enseñanza» (SEJ2005-08499).

Experiencias de innovación e investigación

En este apartado trataremos de aportar una visión general de los diferentes trabajos de innovación e investigación desarrollados en los seis años de trabajo de este grupo de profesores.

La propuesta de trabajo con el Puzzle se hizo en las XX Jornadas de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton», celebradas en febrero del año 2000. En estas Jornadas se desarrolló el Taller «Matemáticas para Todos» dirigido por el Dr. Socas, con profesores de Educación Primaria y Secundaria, en el que presentó tres materiales:

«Puzzle Algebraico», «Tablas de contar, sumar y restar» y «Tablero Matemático», diseñados por el mismo.

En paralelo a esta experiencia, se había iniciado una investigación sobre habilidades y errores en tres procesos específicos del lenguaje algebraico: la sustitución formal, la generalización y la modelización, dirigidas también por el citado autor.

Las diferentes experiencias realizadas en estos años las resumiremos en la Tabla 1 destacando los aspectos más relevantes: Año, experiencia, centro, grupo, tema de estudio, metodología, formas de intervención en el aula y publicaciones.

Tabla 1. *Experiencias de innovación e investigación*

Año	Experiencia	Centro	Grupo	Temas de estudio	Metodología de investigación	Formas de intervención en el aula	Publicaciones
2001	I	IES Pablo Montesinos	4.º ESO	Números Enteros Expresiones Algebraicas	Pretest Intervención Posttest	Alternancia entre libro de texto y Puzzle Algebraico	Domínguez, E. y Socas, M. M. (2001)
	Paralela	IES San Matías	4.º ESO 1.º BACH	Sustitución Formal Generalización Modelización	Diseño de un cuestionario y administración		Ruano, R. y Socas, M. M. (2001)
2002	II	IES Puerto de la Cruz	3.º ESO	Números Enteros Expresiones Algebraicas	Pretest Intervención Posttest Entrevistas	Adaptación de las actividades del libro de texto al Puzzle Algebraico	Domínguez, E. P. y Socas, M. M. (2003)
	Paralela				Análisis resultados del cuestionario. Clasificación de errores		Ruano, R., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2003. ^a y 2003b)
2003	Constitución del Seminario de Investigación e Innovación Matemática para Secundaria						
2004	III	IES José de Anchieta	2.º ESO	Números Enteros Expresiones Algebraicas Ecuaciones	Pretest Intervención Posttest Análisis de errores Entrevistas	Fichas diseñadas para el trabajo con el Puzzle Algebraico	Domínguez, E., Muñoz, M., Ruano, R. y Socas, M. M. (2004) Muñoz, M., Ruano, R. y Socas, M. M. (2005)
2005	Elaboración de las Fichas de Trabajo con El Puzzle Algebraico						
2006	IV	IES Puerto de la Cruz	4.º de Diversificación	Números Enteros Expresiones Algebraicas	Pretest Intervención Posttest Entrevistas	Fichas elaboradas en el Seminario	

Especial referencia merece el año 2003, en el que se constituyó el Seminario de Investigación e Innovación Matemática para Secundaria, en el Área de Didáctica de la Matemática de La Universidad de La Laguna. Previamente, en septiembre de 2002, como culminación del trabajo que veníamos desarrollando, se leyeron las tesis tituladas: «*La innovación como mejora de la enseñanza. El papel de los materiales concretos en clase de matemáticas*» (Eligia Domínguez) y «*Sobre los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en matemáticas: implicaciones didácticas*» (Raquel Ruano).

En el primer trabajo se estudia, por una parte, la innovación en materiales educativos y por otra, se hace una investigación de aula en la que se usa el material «Puzzle Algebraico». En el segundo trabajo se estudiaron las habilidades de un grupo de alumnos respecto a estos procesos característicos del lenguaje algebraico, a través de un cuestionario diseñado al efecto. Además, se pusieron de manifiesto errores que se cometen en el desarrollo de estos procesos con el fin de arbitrar procedimientos de ayuda a los alumnos para corregir dichos errores.

También, este año 2003, se presentó el trabajo titulado: *Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra* en el Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), en el que se realiza un análisis y clasificación de los errores cometidos por un grupo de alumnos de Secundaria. Se intenta clarificar el origen de los mismos con el fin de arbitrar procedimientos de ayuda para su corrección y se extraen consecuencias,

en forma de implicaciones didácticas, del estudio realizado.

A partir de este momento, aunque ambas investigadoras siguen realizando trabajos por separado, sus caminos convergen con la creación del Seminario de Innovación Matemática para Secundaria, coordinado por el Dr. Socas y en el que participan las profesoras: Dras. Hernández y Palarea, del Área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de La Laguna, y Eligia Domínguez, María Muñoz y Raquel Ruano, profesoras de Secundaria.

Los objetivos de dicho seminario son los siguientes:

1. Conocer en profundidad el puzzle algebraico como mediador didáctico.
2. Diseñar y coordinar distintas experiencias didácticas.
3. Redactar secuencias didácticas para el proceso de enseñanza aprendizaje con la intervención del puzzle.
4. Analizar y discutir los resultados obtenidos antes y después de la intervención didáctica en el aula.

Ejemplificación

Como muestra de los distintos trabajos de investigación que se han ido desarrollando desde el Seminario, se presenta el estudio de errores que hemos denominado la experiencia III. Indicaremos previamente diferentes elementos del Marco Teórico y de la Metodología usada.

Marco teórico

De los estudios experimentales sobre lenguaje algebraico (Palarea, 2002) se ha constatado la necesidad de ampliar las fuentes de significados para el lenguaje algebraico a Sistemas de Representación Semiótica de procedencia analógica y visual.

En el caso que nos ocupa hemos limitado las fuentes de significado para el Álgebra a los registros de las fichas de trabajo del alumno, y al registro visual analógico que proporciona el material didáctico: «Puzzle Algebraico».

El estudio de los errores realizado en este trabajo se aborda tomando como referencia el marco teórico descrito en Socas (1997), en el que se consideran tres ejes, no disjuntos, que permiten analizar el origen del error. De esta forma podemos situar los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos:

- Obstáculo
- Ausencia de sentido
- Actitudes afectivas

Metodología

El protocolo seguido en esta experiencia III es el siguiente:

En primer lugar se les administró un pretest a los alumnos, seguidamente se desarrolló la fase de instrucción y posteriormente se administró un posttest. Este proceso se analizó en Domínguez et al. 2004, para posteriormente en Muñoz et al. 2005, presentar un estudio biográfico de las entrevistas realizadas.

La técnica de recogida de datos que en una primera fase fue de carácter más cuantitativo que cualitativo, aunque no exclusivamente, pues se utilizó para la catalogación del origen de los errores, el registro diario tomado por la profesora, se concretó posteriormente en un estudio de carácter cualitativo sobre el análisis de las habilidades de los alumnos durante el periodo de instrucción para la adquisición del lenguaje algebraico.

Descripción y análisis de la experiencia

La experiencia III, que tomamos como ejemplo, se llevó a cabo en el curso 2003-2004 en el IES José de Anchieta (Tenerife) con 18 alumnos de 2.º de ESO. Comenzó el día 9 de enero de 2004 con la realización del pretest a la que se dedicaron dos sesiones, por lo que el periodo de instrucción comenzó el día 12 de enero y se desarrolló a lo largo de 25 sesiones de 55 minutos cada una.

Durante estas sesiones se trataron los siguientes tópicos: cantidades positivas y negativas, valor numérico de una expresión algebraica, operaciones aditivas con expresiones algebraicas y operaciones multiplicativas con expresiones algebraicas. La secuencia de actividades se siguió, con algunos pequeños cambios, de la guía del puzzle algebraico (Socas, 2000).

Los alumnos poseían conocimientos previos de números enteros ya que se habían trabajado en situaciones concretas el curso anterior y en el nuevo curso 2003-2004, en un periodo de instrucción anterior al desarrollado con el puzzle. No tenían conocimientos previos de lenguaje algebraico.

Aunque los puzzles ya estaban contruidos, los dos primeros días del periodo de instrucción los alumnos elaboraron las plantillas de cada pieza del puzzle, pues se entendía que de este modo se familiarizarían antes con la idea de área que se asigna a cada cantidad. Se terminó repartiéndoles el puzzle elaborado por las profesoras puesto que las piezas tenían mayor perfección y esto es de gran importancia en el estudio con esta representación.

Aunque se había trabajado con números enteros con anterioridad, se decidió comenzar la secuencia de actividades con estos por dos razones:

1. Interesaba que los alumnos se fueran familiarizando con la sintaxis y reglas del puzzle.
2. El pretest demostró que había un número considerable de alumnos que todavía no sabían operar con números enteros.

En lo que concierne a la organización del aula, se cambió la distribución de las mesas: de estar sentados en equipos de cuatro, se pasó a que todas las mesas estuvieran orientadas hacia la del profesor. Con esto se pretendía reforzar la importancia de que el registro debía plasmarse individualmente y de manera organizada. Esto interesa fundamentalmente para el aprendizaje del alumno pero, también, para que la profesora pueda establecer un mayor control sobre las incidencias del proceso de enseñanza/aprendizaje.

El trabajo en clase se realizó con fichas. Esto no era nuevo ni para la profesora ni para los alumnos pues ya se venía trabajando de este modo durante el curso. El recurso de las fichas permite que el proceso de enseñanza/aprendizaje sea individualizado. Lo más destacable de esta metodología es que la profesora dirige la toma de registro, pero obliga a que sea el alumno el que la desarrolle.

El postest 1 se realizó pocas semanas antes de finalizar el curso y sirvió como control para evaluar las competencias numérico - algebraicas de los alumnos. Así, la profesora decidió que los alumnos que habían alcanzado las competencias deseadas, se centraran en un trabajo de probabilidad, y el resto, continuaran trabajando con el puzzle. Pasadas dos semanas, a estos últimos

alumnos se les administró nuevamente el postest, que es lo que hemos llamado postest 2.

Finalmente, se seleccionó un grupo de 5 alumnos para realizarles entrevistas. Analizaremos y valoraremos una de ellas.

De los 13 alumnos encuestados, utilizan la representación gráfica del puzzle en el postest:

- 8 alumnos para resolver al menos una de las preguntas relativas a expresiones algebraicas.
- 11 para la resolución de preguntas relacionadas con números enteros.
- Hay dos alumnas que a pesar de no utilizar la representación gráfica del puzzle, sí emplean explícitamente ideas que de él se derivan.

Las entrevistas se realizaron durante la primera quincena de junio de 2004. Los alumnos habían seguido trabajando con el puzzle tras la instrucción y la administración del postest.

Como ya comentamos anteriormente, de los 13 alumnos del IES José de Anchieta se eligieron 5 alumnos para realizarles las entrevistas. La selección se realizó en función de los resultados en el pre y postest, así como la disposición en la clase de matemáticas y el interés en realizar la entrevista. Se seleccionó una alumna de nivel alto; dos de nivel medio pero que presentaron una notable mejora en su disposición hacia la clase de matemáticas durante el período de instrucción con el puzzle; otra de nivel bajo, cuya entrevista es la que analizaremos a continuación; y, por último, un alumno con necesidades educativas especiales (NEE) que tuvo una mejoría clarísima entre el pre y postest y queríamos comprobar si era debido a la representación de los objetos numéricos y algebraicos que proporcionaba el puzzle.

Las entrevistas se basaron en preguntas seleccionadas del pre y postest y no fueron iguales para todos los alumnos. En cada una se incidió sobre aquellos aspectos que consideramos que podían tener mayor relevancia en el proceso de enseñanza/ aprendizaje.

El test utilizado es una adaptación del cuestionario Palarea (2002) que además ha sido utilizado en una experiencia anterior de Domínguez (2003).

A continuación se expresan las características generales de la alumna seleccionada para la entrevista.

Es una alumna con poca predisposición para el estudio y que, con anterioridad a la instrucción con el puzzle, no había mostrado ningún interés por la asignatura de Matemática. Es repetidora y tiene las matemáticas de 1.º de ESO suspendidas.

Es una alumna de nivel bajo, que durante el periodo de instrucción comprendido entre el pre y postest faltó mu-

cho a clase por problemas de salud y, por lo tanto, no siguió la fase de instrucción con el puzzle con continuidad. En el periodo comprendido entre la administración del postest 1 y el postest 2 es cuando comienza a tener conflictos cognitivos relevantes para su aprendizaje y como consecuencia de éstos muestra un avance en el desarrollo conceptual y manipulativo del lenguaje numérico-algebraico; por esta razón es seleccionada para la entrevista.

Mostramos a continuación, a título de ejemplo, algunas producciones de esta alumna, que llamaremos Deborah. Un análisis más completo y en forma de estudio biográfico se referencia en Muñoz, Ruano y Socas (2005).

Analizamos en primer lugar, la pregunta número uno del test en la que se proponen actividades relacionadas con operaciones de carácter aditivo con cantidades positivas y negativas. Un resumen de las respuestas dadas a esta actividad en los test y en la entrevista es lo que comentamos a continuación.

a) $(+5)+(-20)=-15$	b) $(-2).(-3)=+6$
c) $(-2).(+5)=-10$	d) $(+24):(-6)=-4$
e) $(+4)-(+2)=+2$	f) $(+2)-(-3)=+5$
g) $(-9)+3=-6$	h) $-5+(-8)=-13$
i) $-9-(-6)=-3$	j) $-4+(-3)-(-2)=-5$

Figura 1. Respuestas al Pretest.

En el pretest (Figura 1), se observa que tanto para sumar y restar, como para multiplicar, al número de mayor valor absoluto le quita el de menor valor ab-

soluto, esto se comprueba en todos los apartados menos en el d y el j. En el j a 4 le añade 3 y le quita dos.

Con los signos parece ser más arbitraria y barajamos las siguientes hipótesis:

- ¿Pone el signo del mayor?
- ¿Usa las reglas del producto?

En particular, en el caso de las multiplicaciones y en general en el resto de las operaciones, no parece distinguir el sig-

no de la cantidad del signo de la operación.

Al considerar la misma pregunta en el postest 1 (Figura 2), manipulando el puzzle, parece haber corregido su modo de hacer; contesta correctamente a todos los apartados excepto los apartados d y j que deja sin contestar.

a) $(+5)+(+20)=+45$ b) $(-2).(-3)=+6$
 c) $(-2).(5)=+10$ d) $(+24):(-6)=$
 e) $(+4)+(+2)=+6$ f) $(+2)-(-3)=+5$
 g) $(-9)+3=-6$ h) $-5+(-8)=-13$
 i) $-9(-6)=-3$ j) $-4+(-3)-(-2)=$

Figura 2. Respuestas al postest 1.

El puzzle como registro analógico parece haberla ayudado a distinguir la operación de restar del signo de la cantidad.

Finalmente en el postest 2, sigue sin contestar al apartado d, el j lo hace correctamente y en el c y g se equivoca en el signo.

a) $(+5)+(-20)=-15$ b) $(-2).(-3)=+6$
 c) $(-2).(5)=+10$ d) $(+24):(-6)=$
 e) $(+4)-(+2)=+2$ f) $(+2)-(-3)=+5$
 g) $(-9)+3=-6$ h) $-5+(-8)=-13$
 i) $-9(-6)=-3$ j) $-4+(-3)-(-2)=-5$

Figura 3. Respuestas al postest 2.

En la entrevista se observa que procede bien en casi todos los casos, utilizando las dos representaciones, resta siempre quitando, sabe añadir

ceros en los casos en los que tiene necesidad de ello para restar mediante la acción de quitar.

a) $(+5) + (-20) = -15$

b) $(-2) \cdot (+5) = +10$

c) $(+4) - (+2) = +2$

d) $(+2) - (-3) = +5$

Figura 4. Intento fallido de uso del puzzle.

Si consideramos el apartado c, que es el único incorrecto, observamos que en su resolución intenta usar el puzzle, pero no lo consigue.

Veamos una parte del fragmento de la entrevista que alude a este apartado.

D: Menos dos por más cinco...pongo dos fichas negativas...

P: Si no usases el puzzle ¿qué te daría?

D: Más diez.

P: ¿Y por qué más 10? Explica el razonamiento que haces.

D: Dos por cinco 10 y como el cinco es positivo.

P: ¿Pones el signo del mayor?

D: Sí.

Ello nos aporta información sobre el razonamiento que ha seguido con los signos.

La pregunta 7 del test se refiere a operaciones combinadas con cantidades positivas y negativas. En el pretest Deborah contesta correctamente a los apartados a, b y e. Sin embargo, en los apartados c y d, obvia los paréntesis y opera de izquierda a derecha sin tener en cuenta la jerarquía de las operaciones (Figura 5).

a) $(3+5)+4=12$

b) $(5+4)-3=6$

c) $4 \cdot 2 - (5+2) = 5$

d) $5 - (3-1) = 4$

e) $(3-2)+2=3$

f) $5 - (6+7) + 4 =$

g) $3 - (6-2) + (-5+4) + 1 =$

h) $6 \cdot (7+5) - (-8+4) =$

Figura 5. Séptima pregunta del test.

En el postest 1 ya no comete errores, aunque no simplifica las expresiones numéricas y en los apartados g y h, encuentra problemas cuando el primer sumando del paréntesis es una cantidad negativa, y asume que el signo de esta cantidad es la operación que tiene que realizar.

En el postest 2, contesta correctamente los apartados a y e y deja sin respuesta los apartados g y h (Figura 6). Consideramos que el error en el signo del ítem b fue debido a un despiste. El resto de los apartados los tiene mal, porque no sólo da prioridad en la resolución al paréntesis, sino porque también coloca el resultado en primera posición.

a) $(3+5)+4=(8)+4=+12$
b) $(5+4)-3=(9)-3=-6$
c) $4.2-(5+2)=(7)-8=-1$
d) $5-(3-1)=(2)-5=-3$
e) $(3-2)+2=(1)+2=3$
f) $5-(6+7)+4=13+4=17-5=+12$
g) $3-(6-2)+(-5+4)+1=$
h) $6.(7+5)-(-8+4)=$

Figura 6. Respuestas al postest 2.

En la entrevista sólo se le preguntó sobre los apartados c y d, para tratar de averiguar el origen del error. No utilizó el puzzle en la resolución. Las respuestas dadas a estos apartados son correctas. Cuando se le pregunta por qué lo resolvió de esta manera en el postest 2, responde que pensaba que el paréntesis es prioritario e interpreta que la palabra prioritario implica prioridad temporal (es decir se hace lo primero) y física (se coloca en primer lugar).

La siguiente pregunta que comentamos es la 2 y se refiere a operaciones de carácter multiplicativo con expresiones algebraicas.

No podemos aseverar nada sobre sus conocimientos previos a la instrucción con el puzzle, pues no obtenemos ninguna representación de la alumna en el pretest, lo cual nos hace suponer que no tiene ningún significado para ella lo que se le pregunta.

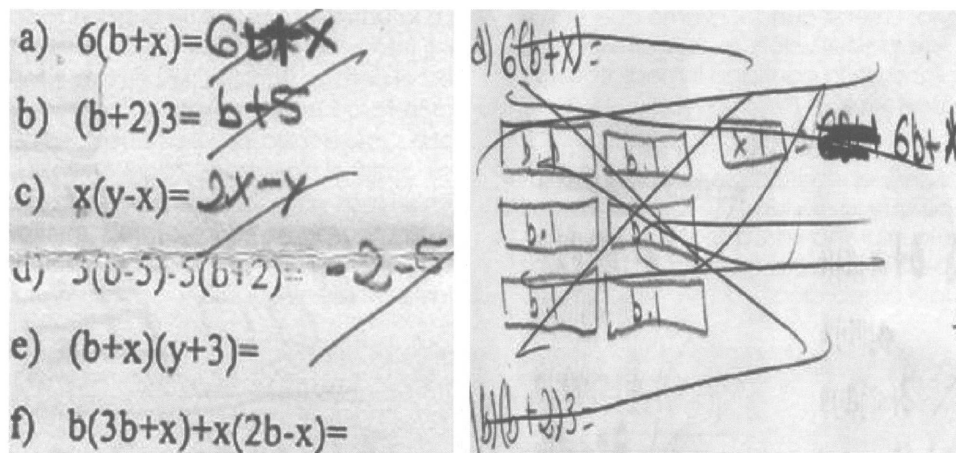


Figura 7. Primeros ítems del postest 1.

En el postest 1, intenta resolver la pregunta utilizando el puzzle, pero no sabe emplearlo y lo descarta. Como observamos sólo responde a los cuatro primeros ítems (Figura 7). En el apartado a no sabemos si distribuye sólo respecto al primer miembro o simplemente omite el paréntesis. Por su proceder en otras preguntas nos decantamos por la segunda opción. Tanto en el ítem b como en el c omite el pa-

réntesis y convierte «el por» en una suma.

En el postest 2 dibuja las fichas del puzzle para resolver los distintos ítems de la pregunta.

Los ítems en los que no hay restas, es decir, a, b y e, los resuelve sin problemas.

Comentamos con más detalle los apartados c y d.

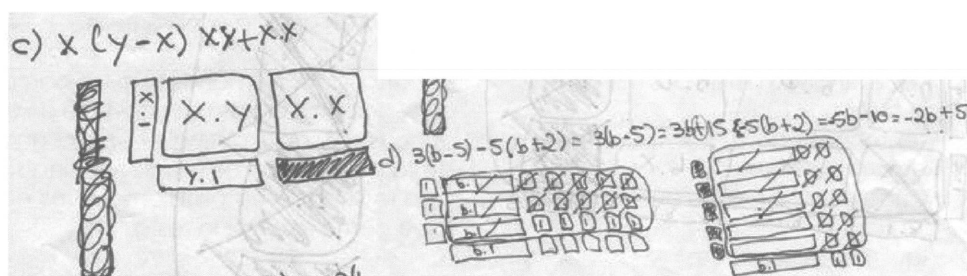


Figura 8. Ausencia de uso del signo igual.

En el apartado c procede correctamente salvo en el signo que corresponde al cuadrado de la incógnita. Además observamos en la manera de

escribir que no usa el signo igual (Figura 8). En el apartado d distribuye los dos paréntesis por separado. En el primer paréntesis se vuelve a equivocarse con el

signo. En el segundo, asume que el signo de la operación, resta, corresponde al signo de la cantidad inmediatamente posterior.

Si no tenemos en cuenta este fallo en el signo, el resultado sería correcto. Parece que la cadena de razonamientos de la alumna es correcta, si bien, no sabe transcribirla formalmente al lenguaje algebraico.

En la entrevista procede bien en todos los ítems, no comete el error del signo en el ítem c, aunque su primera intención tanto en el apartado a como en el b sigue siendo la del postest 1, es decir, omitir el paréntesis y convertir el por en un más, ella misma se da cuenta que este proceso no es correcto y multiplica correctamente usando el puzzle y la idea de área (Figura 9).

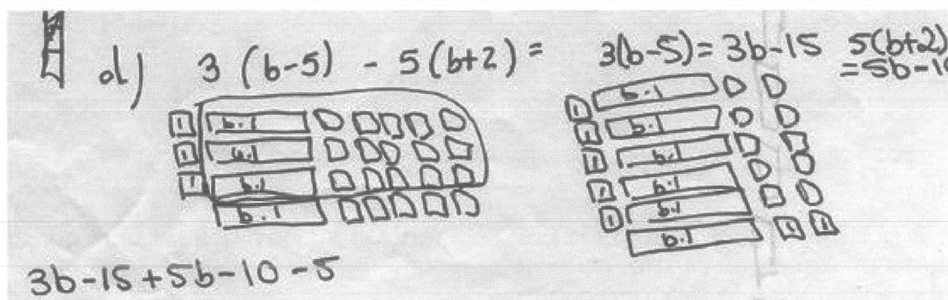


Figura 9. Uso del puzzle para la multiplicación.

Siguiendo con este apartado d vamos a relatar parte de la transcripción de la entrevista.

- D: Pongo tres fichas unidad añado una b y cinco fichas negativas...ahora tres b menos 5 me da 3b menos 15.
P: Pues, escribe.
D: Y ahora tengo que hacer cinco b más 2...y cinco b más dos me da cinco b menos 10
P: Y entonces ahora qué hacemos.
D: Restamos...
P: Venga escribe aquí lo que vas a hacer ahora.
D: Aquí me trabé, no sé.

Esto nos permite resaltar varias cuestiones:

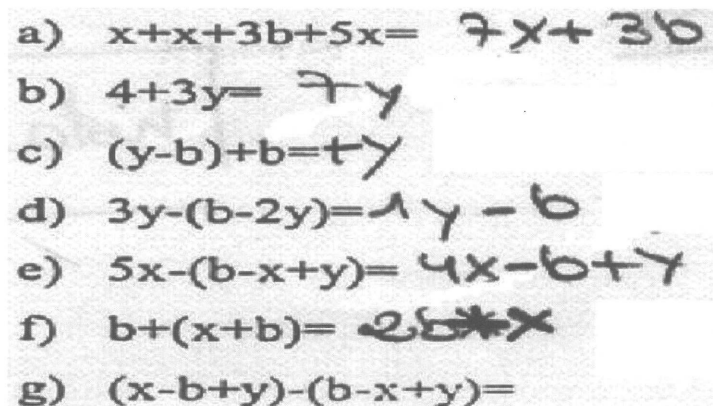
En relación con el postest 2, la primera distribución la realiza correctamente mientras que en la segunda se equivoca en el signo. En el postest fue al revés. Aun-

que no escribe bien algebraicamente, sí parece que existe una evolución en la escritura pues no se limita a escribir una cadena de igualdades. Sin embargo, no lee correctamente las operaciones, como el signo de multiplicar no está escrito explícitamente, no lo lee y además no tiene en cuenta el paréntesis.

Por otro lado, fijémonos que así como en el postest 2 la resta se convierte en el signo del 5, aquí distingue entre signo de la cantidad y operación. Aunque esto le supone un problema pues no sabe cómo resolver la resta.

Por último vamos a tomar en consideración la pregunta 8 que se refiere a operaciones algebraicas de carácter aditivo.

En el pretest no contesta ninguno de los ítems. En el postest 1, manipula físicamente el puzzle pero no dibuja.



The image shows seven handwritten algebraic equations, labeled a) through g). The handwriting is in black ink on a light background. Some equations have corrections or deletions. For example, in equation f), the result '2b+x' has been crossed out with a large 'X'. In equation g), the result is blank.

a) $x+x+3b+5x=7x+3b$
b) $4+3y=7y$
c) $(y-b)+b=y$
d) $3y-(b-2y)=1y-b$
e) $5x-(b-x+y)=4x-b+y$
f) $b+(x+b)=2b+x$
g) $(x-b+y)-(b-x+y)=$

Figura 10. Respuesta a los ítems.

Como se puede observar (Figura 10), en esta pregunta, contesta correctamente aquellos ítems que no implican un menos delante del paréntesis, salvo en el ítem b, en el que aún siente la necesidad de clausura.

Sin embargo, cuando aparece un menos delante del paréntesis, actúa como si el paréntesis no existiese. Éste es un error que ya cometió en los ejercicios referentes a cantidades positivas y negativas.

En el postest 2, también manipula el puzzle físicamente y continúa sin dibujar. Ahora, también, sigue sin tener problemas en las operaciones aditivas que no implican un signo menos delante del paréntesis y además, resuelve su problema de clausura. A corregir el error de necesidad de clausura, le han ayudando las piezas del puzzle.

Respecto a las operaciones con un menos delante del paréntesis sigue sin resolverlas correctamente, aunque la manera de proceder ha cambiado. Omite las letras que están dentro del paréntesis cuando han aparecido previamente y

convierte la resta en una suma. Como resta quitando, consideramos que, para ella, esta palabra es sinónima de eliminar.

En la entrevista, además de manipular el puzzle, lo dibuja. Los ítems que había resuelto correctamente, sigue teniéndolos bien. Vamos a relatar parte de la transcripción de la entrevista en el ítem d que es el primero en el que hay un menos delante del paréntesis.

D: Pongo tres «y» y una «b»

P: ¿Tienes que añadir una «b»?

D: Una b negativa ¿no?

P: ¿Y por qué negativa? ...Sigue, añades una b negativa ¿y?

D: Dos y.

P: ¿Dos y positivas o negativas?

D: Negativas.

P: ¿Por qué?

D: Silencio.

Se observa que vuelve a actuar como si el paréntesis no existiera. Consideramos que este error tiene dos motivos:

El primero es que Deborah siempre resta quitando en lugar de sumando el opuesto. Y emplear la idea de quitar

con expresiones algebraicas le resulta muy complicado.

El segundo motivo es el tipo de instrucción, ya que a lo largo de ésta, siempre

queda muy claro cuál es la operación y cuál el signo de la cantidad. Tras su silencio, la profesora resuelve el ítem utilizando tanto la idea de quitar como la del opuesto (Figura 11).

Handwritten work showing the distribution of $3y$ over $(b-2y)$. The equation is written as $d) 3y(b-2y) = 3y + (-b + 2y)$. Below the equation, there are two diagrams. The left diagram shows three boxes labeled y , y , and y stacked vertically, followed by an equals sign and two empty boxes. The right diagram shows three boxes labeled y , y , and y stacked vertically, followed by a plus sign and a box labeled b with a diagonal line through it, and then a plus sign and a box labeled $2y$.

Figura 11. Solución de la profesora.

Luego se le plantea que realice la siguiente operación y la resuelve perfectamente usando la idea de quitar. Entendemos que Deborah en este momento resuelve un conflicto, que la representación del puzzle le había ayudado a generar, y que era necesario para darle sentido a este tipo de operaciones.

Origen de los errores

El estudio de los errores los resumimos presentando en primer lugar la Tabla 2 en la que se recogen abreviadamente los errores cometidos por Deborah. En la primera columna aparece la denominación de cada tipo de error, las siguientes columnas se refieren al número de errores de cada tipo respecto a los contenidos tratados (números enteros y expresiones algebraicas) en las pruebas, respectivamente.

Tabla 2. Errores cometidos por Deborah

Error	Pretest	Postest 1	Postest 2
Mayor menos menor	5	-	1
Opera y pone signo del mayor	-	-	1
Omite paréntesis	2	5	-
Proceso incompleto	-	8	-
Suma (-) y (+)	-	2	3
Inversión de la resta	-	-	3
Escribe mal el proceso	-	-	-
Convierte · en +	-	-	1
Clausura	-	-	-
Quita sumandos que ya han aparecido	-	-	2
(+) · (-) = (+)	-	-	2
Confunde signo de cantidad con operación	-	2	-

En segundo lugar, adjuntamos la Tabla 3 en la que situamos el origen de los erro-

res relativos a las preguntas relacionadas con expresiones algebraicas.

Tabla 3. Origen de los errores

ORIGEN	TIPO DE ERROR
Actitudes afectivas	(+)·(-) = (+)
Ausencia de sentido	Aritmética Omisión de paréntesis Procedimiento Convierte (·) en (+)
Obstáculo	Didáctico Quita los sumandos que ya han aparecido Cognitivo Clausura

En este momento de la investigación queremos analizar si las conjeturas que habíamos formulado en Domínguez y otros (2005), sobre el posible origen del error, son o no ciertas.

El error que hemos denominado «(+) · (-) = (+)» en este caso tiene su origen en la actitud de la alumna. Cometió este error cuando además tenía que aplicar la propiedad distributiva y no en el resto de los casos, por eso pensamos que la alumna estaba más preocupada por distribuir correctamente que en los signos.

Inicialmente habíamos conjeturado que la omisión del paréntesis podía tener dos orígenes: ausencia de sentido debido

a cuestiones que habían quedado sin resolver en el campo numérico y obstáculo didáctico. En concreto, para Deborah, el origen de este error está en una ausencia de sentido. Inicialmente cometía este error en el campo numérico, parece que el puzzle la había ayudado a solucionar este error pero lo único que ha ocurrido es que se ha trasladado, cuando se le plantean nuevos retos vuelve a proceder como solía hacer.

El error que hemos denominado «Convierte (·) en (+)» tiene su origen en una ausencia de sentido. Deborah tiene problemas con la multiplicación y como la suma no le ocasiona dificultades, transforma el producto en suma.

El error denominado «Quita los sumandos que ya han aparecido» tiene su origen en un obstáculo didáctico. Como comprobamos en la entrevista, Deborah realiza la resta quitando en lugar de sumando el opuesto, y entendía la palabra quitar como sinónima de eliminar. Así consideramos importante hacer hincapié en los distintos métodos para realizar la resta y poner sumo cuidado en las palabras que elegimos a la hora de explicar puesto que los alumnos no siempre entienden lo mismo que nosotros queremos decir.

La «Clausura» es un error que tiene su origen en un obstáculo cognitivo, Deborah no ve las expresiones algebraicas como enunciados que a veces son incompletos, no aceptan que una expresión no pueda cerrarse.

Implicaciones curriculares: Propuesta de desarrollo curricular

El trabajo desarrollado nos ha llevado a elaborar una propuesta de desarrollo curricular con el puzzle algebraico que pretende ser un libro guía de intervención en el aula. Se ha organizado en unidades elementales de trabajo que hemos llamado fichas y están estructuradas en torno a cuatro temas: Números enteros, Expresiones Algebraicas, Ecuaciones de Primer Grado y Ecuaciones de Segundo Grado.

A lo largo de las distintas experiencias nos dimos cuenta de la necesidad de que el ritmo de aprendizaje de los alumnos fuese individualizado, para poder atender a la diversidad cognitiva que encontramos en la clase de matemáticas. Para ello necesitábamos que el formato permitiese al alumno ser autosuficiente en su proceso de aprendizaje,

pero a la vez, que el profesor pudiese controlar el desarrollo correcto del aprendizaje. Por otra parte, consideramos que para que el alumno asimile un objeto matemático es necesario que trabaje con varias representaciones del mismo; estas representaciones fueron: lenguaje habitual, lenguaje algebraico y representación gráfica. La manipulación de varias representaciones por el alumno le permite construir imágenes mentales de un objeto matemático, para llegar al estadio autónomo de representación de éste. Ésta fue la razón fundamental que nos llevó a establecer este formato de fichas.

Hemos realizado dos tipos fundamentales de fichas. El primero es el que hemos denominado «fichas guiadas» en las que se plantean actividades parcialmente resueltas, y, en el segundo hay fichas de actividades sin guiar en las que los alumnos ponen en práctica sus conocimientos. Además, intercaladas entre las fichas de actividades presentamos unas fichas dedicadas a la historia de los distintos tópicos.

Implicaciones en la investigación de la enseñanza de las matemáticas

Finalizamos este artículo/informe del trabajo del Grupo, mencionando tres propuestas de investigación que se están llevando a cabo. Dos de ellas en fase de redacción de la memoria: Una memoria de la fase de investigación de tercer ciclo «Puzzle algebraico, un material innovador en clase de matemáticas» (Eligia Domínguez), y un proyecto de tesina: «Análisis de los procesos cognitivos de los alumnos en la enseñanza y aprendizaje del álgebra, usando el material didáctico puzzle al-

gebraico como registro analógico de los objetos matemáticos estudiados. Estudio de casos» (María Muñoz). La tercera propuesta, un proyecto de tesis doctoral, que se encuentra en fase de realización: «Competencia y errores de los alumnos de Secundaria en los procesos de Sustitución Formal, Generalización y Modelización. Implicaciones didácticas para la transición del len-

guaje numérico al algebraico» (Raquel Ruano).

Queremos resaltar, por último, que el trabajo realizado por el Grupo en estos años muestra una forma clara retroalimentación entre la investigación y la innovación en la que el elemento fundamental ha sido la experiencia de aula y el trabajo con alumnos.

Dirección de contacto:

Eligia Domínguez Santana, Josefa Hernández Domínguez, María Muñoz Pérez, M.^a
Mercedes Palarea Medina, Raquel Ruano Barrera y Martín M. Socas Robayna
Departamento de Análisis Matemático
Área de Didáctica de la Matemática
Universidad de La Laguna
c/ Astrofísico Francisco Sánchez, s/n
38271 La Laguna
Tenerife
E-mail: eligiad@canariastelecom.com, jhdez@ull.es, mmunperh@gobiernodecanarias.org, mpalarea@ull.es, RRB@amena.com, msocas@ull.es

Referencias

- DOMÍNGUEZ, E. (2003). *La innovación como mejora de la enseñanza. El papel de los materiales concretos en clase de Matemáticas*. Tesina de licenciatura. Universidad de La Laguna. Sin Publicar.
- DOMÍNGUEZ, E. Y SOCAS, M. M. (2001). Experiencias con el material didáctico: Puzzle Algebraico, sobre expresiones algebraicas elementales y operaciones, con alumnos de ESO. *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática*, 3, 43-68.
- DOMÍNGUEZ, E. Y SOCAS, M. M. (2003). El material didáctico «Puzzle Algebraico». Un recurso innovador en clase de matemáticas. *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática*, 5, 123-142.
- DOMÍNGUEZ, E., MUÑOZ, M., RUANO, R. Y SOCAS, M. M. (2004). Números enteros y expresiones algebraicas. Estudio Biográfico. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 6, 107-134.
- MUÑOZ, M., RUANO, R. Y SOCAS, M. M. (2005). Números enteros y expresiones algebraicas en 2.º de ESO. Experiencia Didáctica con el Puzzle algebraico. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 7, 299-320.
- PALAREA, M. M. (2002). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis Doctoral. Secretariado de Publicaciones. Universidad de La Laguna.
- RUANO, R. (2003). *Sobre los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en Matemáticas: implicaciones didácticas*. Tesina de licenciatura. Universidad de La Laguna. Sin Publicar.
- RUANO, R. Y SOCAS, M. M. (2001). Habilidades cognitivas en relación con la sustitución formal, la generalización y la modelización que presentan alumnos de 4.º de ESO. *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática*, 3, 239-265.
- RUANO, R., SOCAS, M. M. Y PALAREA, M. M. (2003a). Estudio sobre dificultades y errores en relación con el lenguaje algebraico. *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática*, 5, 297-321.
- RUANO, R., SOCAS, M. M. Y PALAREA, M. M. (2003b). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 311-322). Universidad de Granada.
- RUANO, R., SOCAS, M. M. Y PALAREA, M. M. (2004). Cognitive Abilities and Errors of Students in Secondary School in Algebraic Language Processes. En D. E. McDougall,

y J. A. Ross (Eds.), *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology Mathematics Education (PME-NA XXVI)*, v.1, pp. 253-261.

SOCAS, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap. V, pp. 125-154). En L. Rico y otros, *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.

SOCAS, M. M. (2000). *Guía del Puzzle Algebraico*. La Laguna: Campus.

SOCAS, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.