

Fenómenos relacionados con el límite finito

*María Teresa Sánchez Compañá, Francisco Javier Claros Mellado y
Moisés Coriat Benarroch,
Universidad de Granada*

Resumen

En este trabajo se ponen de manifiesto los pasos seguidos hasta la observación de los fenómenos relacionados con el límite finito de una sucesión y con el límite finito de una función en un punto. La exposición incluye una caracterización de tales fenómenos encontrados, ejemplos de la presencia de ellos en libros de texto, y las conclusiones e implicaciones didácticas que se derivan del estudio.

Palabras clave

Límite, sucesión, función, fenómenos.

Abstract

In this work the steps followed until the observation of the phenomena related to the finite limit of a succession and to the finite limit of a function in a point are shown. The exhibition includes a characterization of such found phenomena, examples of the presence of them in text books, and the didactic conclusions and implications that they are derived from the study.

Key words

Limit, succession, function, phenomena.

Introducción: Origen del estudio

Nuestro interés sobre la noción de límite tiene su origen en el estudio del análisis no estándar y el tratamiento que da el mismo al concepto de límite. Este interés queda justificado en nuestra memoria de investigación (Claros, 2000 y Sánchez, 2000).

Trabajando sobre el concepto de límite observamos la presencia de un campo semántico, en el que intervienen nociones, ideas o definiciones como las de infinito potencial, infinito actual o aproximación, y problemas relacionados con el uso del lenguaje para estructurar frases con sentido alrededor de la idea de límite. Este campo semántico puede estar presente incluso antes de la enseñanza del concepto de límite, de manera que los nuevos conocimientos se mezclarán con las concepciones espontáneas anteriores a la enseñanza, para que los alumnos formen lo que se denomina concepciones personales en torno al límite (Cornu, 1991).

Entendimos que sería de algún interés para la investigación el profundizar en ese campo semántico y en la colección de problemas. Además, observamos que en la mayoría de los estudios dedicados al concepto de límite, sólo los en-

tendidos podían establecer una distinción clara entre el concepto de límite de una sucesión y el concepto de límite de una función. Es más, en los trabajos de investigación no se solía distinguir entre ambos conceptos. Esta tendencia ha cambiado en los últimos años, apareciendo trabajos que se ocupan o del límite de una sucesión (Mamona-Downs, 2001), o del límite de una función (Espinoza y Azcárate, 2000).

A partir de este momento decidimos ocuparnos de dos conceptos: el límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto; acuñamos, ingenuamente, la expresión «aproximación simple», para referirnos al primero, y «aproximación doble», para el segundo. Las siguientes ideas nos parecieron evidentes:

- La aproximación simple designaría los límites (finitos) de sucesiones, reconociendo así el acercamiento indefinido de los valores de la sucesión a su límite.
- La aproximación doble designaría los límites finitos de funciones en un punto, reconociendo así el doble acercamiento arbitrario de la variable independiente a un valor y de la función, a otro valor.

Para analizar las diferencias entre el límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto, necesitábamos primero elegir una definición de entre las diferentes definiciones de límite que hay en los manuales de cálculo más usados en la Universidad. Elegimos siete definiciones de límite de sucesiones, que fueron tomadas de los manuales que pudimos encontrar en la Biblioteca de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Málaga (El anexo 1 incluye las 7 definiciones). Con ellas, elevamos una consulta a expertos: profesores de la facultad de Ciencias Ma-

temáticas y del departamento de Matemática Aplicada de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática. Los encuestados prefirieron la siguiente definición:

«Sea x_n una sucesión en $\mathbb{R}$, decimos que x_n converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos $\lim x_n = x$) si para cada $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que si $n \geq N$ entonces $|x_n - x| < \varepsilon$ »

Por analogía con esta definición tomamos como definición de límite finito de una función en un punto:

« f tiene límite l cuando x tiende a a , si para todo $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ con $x \neq a$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$ »

Al estudiar a fondo ambas definiciones, concluimos que era posible abordar el concepto de límite desde dos puntos de vista: simbólico y fenomenológico. Desde el punto de vista simbólico, o formal, que no excluye, sin embargo, el reconocimiento de fenómenos matemáticos organizados por las definiciones indicadas, un estudio comparativo de ambas permitió elaborar colecciones de analogías y diferencias en tres campos bien determinados: Dependencia; Orden, valor absoluto y cota; Procesos infinitos y tipos de infinitos, incluyendo cuestiones relacionadas con la cardinalidad.

Al observar el estudio comparativo desde una perspectiva fenomenológica, nos dimos cuenta de que el concepto de límite ciertamente organiza los campos indicados, pero no podíamos dar cabida a otros fenómenos aún no considerados.

De una manera ingenua, como hemos indicado, creíamos haber observado un fenómeno de aproximación simple (en sucesiones) y otro de aproximación doble (en funciones). Junto a ellos, nos

vimos obligados a reconocer que la definición de límite organizaba otros fenómenos, aún por precisar, que, inicialmente, acordamos designarlos con la expresión «fenómenos de ida-vuelta». Las descripciones ingenuas, dadas en aquel momento, de tales fenómenos de «ida y vuelta», fueron:

- En la definición formal de límite finito de una sucesión, la «ida» consiste en la *creación* de una función $e-N_0(e)$, y la «vuelta» consiste en la *comprobación* de que la función creada se ajusta bien al problema: la comprobación lleva consigo una *aproximación simple de la variable dependiente*.
- En la definición formal de límite finito de una función en un punto, la «ida» consiste en la *creación* de una función $e-d(e)$, y la «vuelta» en la *comprobación* de que la función creada se ajusta bien al problema: la comprobación lleva consigo una *aproximación doble tanto de la variable independiente como de la dependiente*.

Recapitulando, habíamos observado ya cuatro fenómenos no detectados en el estudio comparativo de las definiciones (Tabla 1).

Tabla 1. *Fenómenos relacionados con la definición de límite*

En sucesiones	En funciones
Aproximación simple	Aproximación doble
Ida-vuelta	Ida-vuelta

En el caso de que tuviéramos algo de razón al considerar estos fenómenos, pensamos que merecería la pena:

- Precisar el significado de esos fenómenos.

- Detectar su uso.
- Establecer la conexión con los otros fenómenos, todos ellos matemáticos, descritos en el estudio comparativo.

Este trabajo se dedica exclusivamente a cumplir el primer objetivo y a dar ejemplos del segundo. En el apartado siguiente, describiremos los cuatro fenómenos y estableceremos su relación con las definiciones de límite de una sucesión y la de límite de una función en un punto. Y en el posterior, presentaremos ejemplos de uso de los cuatro fenómenos: dichos ejemplos están extraídos de un trabajo más amplio y sistemático que forma parte de las tesis doctorales de dos de los autores.

Descripción de los fenómenos

En la definición de límite finito hemos observado la presencia de fenómenos de aproximación intuitiva y de fenómenos de retroalimentación.

Fenómenos de aproximación intuitiva

Se manejan conceptos matemáticos (de acercamiento o de aproximación) de manera no rigurosa o no matemáticamente acabada. En su inmensa mayoría, se trata de afirmaciones matemáticamente correctas que se dan como válidas tras una observación de pares de números relacionados.

Aproximación simple en sucesiones. Se consideran k términos ordenados (generalmente consecutivos) de una sucesión: $(1, a_1), (2, a_2), \dots, (k, a_k)$.

Fenómeno observado: Al inspeccionar la secuencia de valores $a_1, a_2, \dots, a_k$, parecen acercarse a un valor. Usamos la expresión «parecen acercarse» de manera voluntariamente ambigua porque

pretendemos capturar, al usarla, cualquier intuición del límite de la sucesión. Por ejemplos algunos enunciarán una conjetura; otros declararán ese límite como resultado del reconocimiento de una pauta (explícita o no) en los valores inspeccionados. Por comodidad, designaremos este fenómeno con la expresión *aproximación simple intuitiva* o ASI.

Modelo: En la sucesión $(1, 2/1), (2, 2/2), (3, 2/3), (4, 2/4), \dots$ el término $2/n$ parece acercarse a cero a medida que n crece.

Aproximación doble en funciones. Análogo al anterior, con una condición añadida: se representa la función mediante una sucesión. Se parte de una función real de una variable real, f , y se seleccionan k pares de valores, $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_k, f(x_k))$.

Fenómeno observado: Los valores $x_1, x_2, \dots, x_k$ parecen acercarse a un valor y sus respectivas imágenes $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)$ parecen acercarse a otro valor. El que está aprendiendo cree que hay dos aproximaciones, la de la sucesión de valores de la variable independiente hacia un valor y la de la sucesión de valores de la variable dependiente hacia el límite; es consciente, o no, de la conexión que la función f establece entre ambas sucesiones. Esta observación nos conduce a designar el fenómeno con la expresión *aproximación doble intuitiva* o ADI.

Modelo: En la función $f(x) = x+1$, si tomamos los pares de valores $(0.9, 1.9), (0.99, 1.99), (0.999, 1.999), \dots$ se observa que cuando x se acerca a 1 los valores $f(x)$ se acercan a 2.

Fenómenos de retroalimentación

Se manejan conceptos matemáticos formales, en el sentido de que los procesos sólo se realizan en su plenitud con ayuda del sistema de representación simbólica.

El límite finito de las sucesiones. Se considera una sucesión (n, a_n) y la definición de límite de una sucesión. Fenómenos observados con ayuda de la sucesión y de la definición:

- (1) Se afirma la existencia de una función natural de variable real $(\varepsilon, N(\varepsilon))$.
- (2) Se construye efectivamente dicha función.

«Construcción efectiva» significa aquí una de estas dos posibilidades: bien se obtiene la expresión de la función $(\varepsilon, N(\varepsilon))$ o bien se demuestra inequívocamente su existencia.

Modelo: Partiendo de la sucesión $(n, 1/n)$ se construye la función $(\varepsilon, E(1/\varepsilon) + 1)$ donde E designa la función parte entera. La sucesión (n, a_n) y la función $(\varepsilon, N(\varepsilon))$ están inevitablemente enlazadas: con ayuda de la primera, la definición de límite induce a construir la segunda; con ayuda de la segunda, se establece una propiedad de la primera. Por esta razón, designaremos este fenómeno de retroalimentación con la expresión *ida y vuelta en sucesiones* o IVS.

El límite finito de las funciones numéricas de una variable real. Se considera una función real de una variable real, f , y la definición de límite de una función en un punto x_0 .

Fenómenos observados con ayuda de la función y de la definición:

- (1) Se afirma la existencia de una función real de variable real $(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$
- (2) se construye efectivamente dicha función.

«Construcción efectiva» significa aquí una de estas dos posibilidades, bien se obtiene la expresión de la función $(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$ o bien se demuestra inequívocamente su existencia.

Modelo: Partiendo de la función $f(x)=2x$, se construye la función (ε, δ) , donde $\delta < \varepsilon/2$. Las funciones f (de la variable x) y δ (de la variable ε) están inevitablemente enlazadas: con ayuda de la primera, la definición de límite induce a construir la segunda; con ayuda de la segunda, se establece una propiedad de la primera. Por esta razón, designaremos este fenómeno de retroalimentación con la expresión *ida y vuelta en funciones* o IVF.

Presencia de los fenómenos: representaciones y sistemas de representación

A partir de los años 80 se ha detectado un uso masivo de las representaciones en educación matemática. Las representaciones son entendidas desde entonces como:

«todas aquellas herramientas, -signos o gráficos- que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con los cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas» (Rico, 2000).

Este aumento masivo de los sistemas de representación está presente en los li-

bro de texto, que se han convertido en un «espacio» adecuado para detectar la presencia de los fenómenos descritos anteriormente. Los autores de libros de texto los usan al dar ejemplos de límite o al presentar una definición de límite. En un estudio anterior de libros de texto que hemos realizado, hemos encontrado que, conjuntamente, los autores se apoyan en uno o más sistemas de representación (verbal, gráfico, simbólico o tabular).

Ejemplos de fenómenos en los libros de texto

El siguiente paso fue la observación de los fenómenos descritos en el punto dos en los libros de texto. Para ello se analizaron libros correspondientes al periodo 1933-2005. En el caso de las sucesiones se analizaron 24 libros y en el caso de las funciones se analizaron 26 libros. La muestra obtenida para cada uno de los estudios fue intencional, solamente estudiamos los libros a los que tuvimos acceso en los diferentes institutos en los que trabajamos como docentes.

En este documento no vamos a presentar todos los resultados que obtuvimos del estudio de los libros de texto, solamente vamos a presentar la Tabla 2 que resume la presencia de los fenómenos en los mismos. Esta tabla nos ayudará a elegir los ejemplos que vamos a tomar. Los resultados del estudio se resumen en:

Tabla 2. Presencia de los fenómenos estudiados en libros de texto

	Verbal		Gráfico		Tabular		Simbólico	
ASI	19	5	24	0	7	0	0	0
IVS	9	17	7	6	1	0	34	17
ADI	27	18	11	2	17	0	0	1
IVF	11	27	9	10	0	0	13	17
Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	

Presentar un ejemplo de cada fenómeno en cada uno de los sistemas de representación considerados (verbal, gráfico, tabular y simbólico), y distinguiendo a la vez si el fenómeno aparece en ejemplo o en definición, prolongaría este artículo excesivamente, ya que tendríamos que dar treinta y dos ejemplos. Por este motivo vamos a seleccionar los fenómenos que tienen mayor frecuencia absoluta, pero cambiando la aproximación doble intuitiva verbal ejemplo por la aproximación doble intuitiva tabular ejemplo. La razón de este cambio es que aparezca un fenómeno de cada uno de los sistemas de representación considerados. De esta manera los cuatro fenómenos seleccionados son:

- Ida-vuelta en funciones verbal en definición.
- Aproximación simple intuitiva gráfico en ejemplo.
- Aproximación doble intuitiva tabular en ejemplo.
- Ida-vuelta en sucesiones simbólico en ejemplo.

Consideramos que estos ejemplos son los más claros y llamativos. Para presentarlos se presenta el fragmento correspondiente al fenómeno y se acompaña de una referencia del libro de texto del que se ha extraído. A continuación se da una explicación sobre el ejemplo que se presenta.

Aproximación simple intuitiva (a. s. i. g.-e.) gráfica en ejemplo

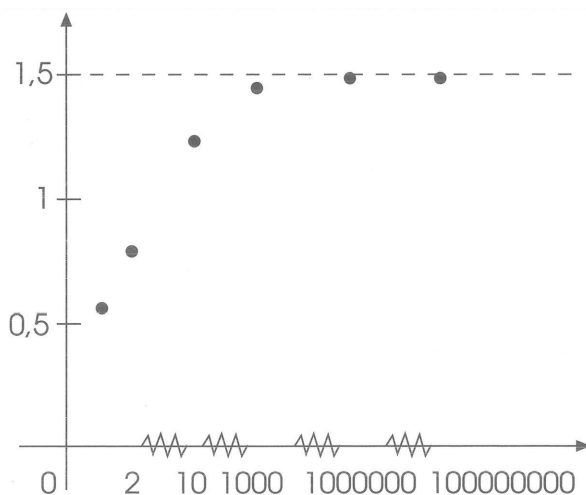


Figura 1. Gráfica tomada de Bescos y Pena (2002, p. 90).

Se trata de una ASI (aproximación simple intuitiva en sucesiones), ya que al inspeccionar la secuencia de términos $a_1 = 0,55$, $a_2 = 0,72$, $a_3 = 1,49$, $a_4 = 1,49$,

$a_5 = 1,499$, $a_6 = 1,4999$, parecen acercarse al valor 1,5, además el sistema de representación utilizado es el gráfico y el fenómeno aparece en un ejemplo.

Aproximación doble intuitiva (a. d. i. t.-e.) tabular en ejemplo

2. Halla el límite de $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ cuando x tiende a 1.

Solución

Evidentemente, no existe $f(1)$. Sin embargo, en la figura 4 se observa que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Utilizando sucesiones:

x	...	0,9	0,99	0,999	... 1 ...	1,001	1,01	1,1	...
y	...	1,9	1,99	1,999	... 2 ...	2,001	2,01	2,1	...

En este caso, aunque no existe $f(1)$, sí que existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. (Negro, Benedicto, Martínez y Poncela, 1997, p. 219).

Se trata de una ADI (aproximación doble intuitiva en funciones), ya que al inspeccionar la secuencia de términos $x_1 = 0,9$ $x_2 = 0,99$ $x_3 = 0,999$... x_n parecen acercarse a 1, mientras que los valores $f(x_1)=1,9$ $f(x_2)=1,99$ $f(x_3)=1,999$... $f(x_n)$ parecen acercarse a 2. El sistema de representación utilizado es el gráfico y el fenómeno aparece en un ejemplo.

Ida y vuelta en sucesión (i. v. s. s.-e.) simbólica en ejemplo

Ejemplo

Averigua qué términos de la sucesión

$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$

pertenecen al entorno con centro en 2 y radio igual a una centésima.

Solución

Como $\lim a_n = 2$ tendrán que pertenecer a $E_{0,01}(2) = (1,99, 2,01)$ todos los términos desde uno en adelante.

En efecto, tanteando y utilizando una calculadora se tiene:

$a_{199} = 398/200 = 1,99$. Está justo al borde del entorno.

$a_{200} = 400/201 = 1,9900498 \dots \in E_{0,01}(2)$.

Los elementos que siguen a a_{200} continúan perteneciendo al entorno.

Puede llegarse al resultado mediante cálculo y no por tanteo:

$$a_n \in E_{0,01}(2) \rightarrow 1,99 < a_n < 2,01$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1,99 < a_n \rightarrow 1,99 < \frac{2n}{n+1} \rightarrow 1,99 < 0,01 \cdot n \\ \rightarrow n > 199 \\ a_n < 2,01 \rightarrow \frac{2n}{n+1} < 2,01 \rightarrow -2,01 < 0,01 \cdot n \\ \rightarrow n > -201 (*) \end{array} \right.$$

La condición (*) la cumplen todos los términos, luego basta con que $n > 199$. Es decir, pertenecen al entorno los términos a partir de a_{200} . (Negro y otros, 1997, p. 218)

Se trata de una i. v. s. simbólica en ejemplo porque se construye la función ε - N_0 . El sistema de representación utilizado es el simbólico y como instrumento se trabaja con un ejemplo.

Ida y vuelta en función (i. v. f. v.-d.) verbal en definición

L es el límite de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ si y sólo si para cualquier distancia ε que se tome, por pequeña que sea, existe otra distancia δ , tal que si la distancia entre x y a es menor que δ entonces la distancia entre $f(x)$ y L se mantiene menor que ε . (Negro y otros, 1997, p. 219).

Se trata de una i. v. f. verbal en definición porque se construye la función ε - δ . El sistema de representación utilizado es el verbal y como instrumento se trabaja con una definición.

Conclusiones e implicaciones didácticas

Los fenómenos descritos, así como los ejemplos presentados de los mismos, ayudan a conjeturar que el paso del lí-

mite de sucesiones al límite de funciones, no es tan evidente como podría pensarse en un principio.

Igualmente afirmamos que el manejo de diferentes sistemas de representación, puede hacer que se pongan de manifiesto fenómenos que en principio no se habían observado. Esta evidencia puede ayudar a la asimilación del concepto de límite, ya sea en sucesiones o en funciones.

El siguiente paso, una vez descritos los fenómenos y observar su presencia en los libros de texto, es observar que fenómenos emplean los alumnos con mas frecuencia, cuando tienen que justificar que una determinada sucesión o función tiene límite. Para ello estamos diseñando un cuestionario, que nos ayude a clasificar las expresiones de los alumnos ante la resolución de cuestiones relacionadas con el límite, y en la que se emplean diferentes sistemas de representación.

Dirección de contacto:

María Teresa Sánchez Compañá, Francisco Javier Claros Mellado y Moisés Coriat Benarroch

Departamento de Didáctica de la Matemática

Facultad de Ciencias de la Educación

Universidad de Granada

Campus de Cartuja

18071 GRANADA

E-mail: teryser75@hotmail.com, jaclme@hotmail.com, mcoriat@ugr.es

Referencias

- BESCOS, E. Y PENA, Z. (2002). *Matemáticas 1.º Bachillerato*. Madrid: Oxford Educación.
- CLAROS, J. (2000). *La aproximación en sucesiones de números reales* (Memoria de Tercer Ciclo. Programa de Doctorado de la Universidad de Málaga).
- CORNU, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer.
- ESPINOZA, L. Y AZCÁRATE, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto «límite de función»: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), 355-368.
- MAMONA-DOWNS, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259-288.
- NEGRO, A., BENEDICTO, C., MARTÍNEZ, M. Y PONCELA, J. M. (1997). *Matemáticas 2. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud*. Madrid: Santillana.
- RICO, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.) *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM*. Córdoba: Universidad de Huelva.
- SÁNCHEZ, T. (2000). *La doble aproximación en el límite funcional*. Memoria de Tercer Ciclo. Programa de Doctorado de la Universidad de Málaga.

Anexo 1

Las definiciones que se presentaron a los profesores fueron las siguientes:

1. La condición necesaria y suficiente para que se cumpla que:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Es que para cada entorno V de a , existe un entero n_0 tal que la relación $n \geq n_0$ implique $x_n \in V$ (dicho de otro modo, V contiene todos los x_n con excepción de un número finito de índices).

2. Que un número x es el límite de una sucesión $x_1, x_2, x_3, \dots$ significa que a cada número positivo ϵ se puede hacer corresponder algún término de la sucesión de tal manera que él y todos los que le siguen difieren de x menos que ϵ .

3. « Sea x_n una sucesión en $\mathbb{R}$, decimos que x_n converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos $\lim x_n = x$) si para cada $\epsilon > 0$, existe un número natural N tal que si $n \geq N$ entonces $|x_n - x| < \epsilon$ »

4. La condición necesaria y suficiente para que se cumpla que:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

es que para cada $\epsilon > 0$, exista un entero n_0 tal que la relación $n \geq n_0$ implique $d(a, x_n) < \epsilon$. Este último criterio se puede escribir también de la siguiente manera:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, x_n) < \epsilon.$$

5. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de números reales tiende al límite a y se escribe:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

cuando para todo número $\epsilon > 0$ existe un número natural v que depende de ϵ tal que cualquiera que sea $n > v$, se verifica $|x_n - a| < \epsilon$.

6. La condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{x_n\}$ sea convergente es que a todo número $\epsilon > 0$ se puede asociar un número natural v tal que, cualquiera que sean p y q mayores que v , se verifique $|x_p - x_q| < \epsilon$.

7. Una sucesión $\{x_n\}$ converge hacia a y se escribe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

si para todo $\epsilon > 0$ existe un número natural N tal que, para todos los números naturales n , si $n > N$, entonces $|x_n - a| < \epsilon$.